Korteste veje

- Introduktion
- Egenskaber for korteste veje
- Dijkstras algoritme
- Korteste veje på DAGs

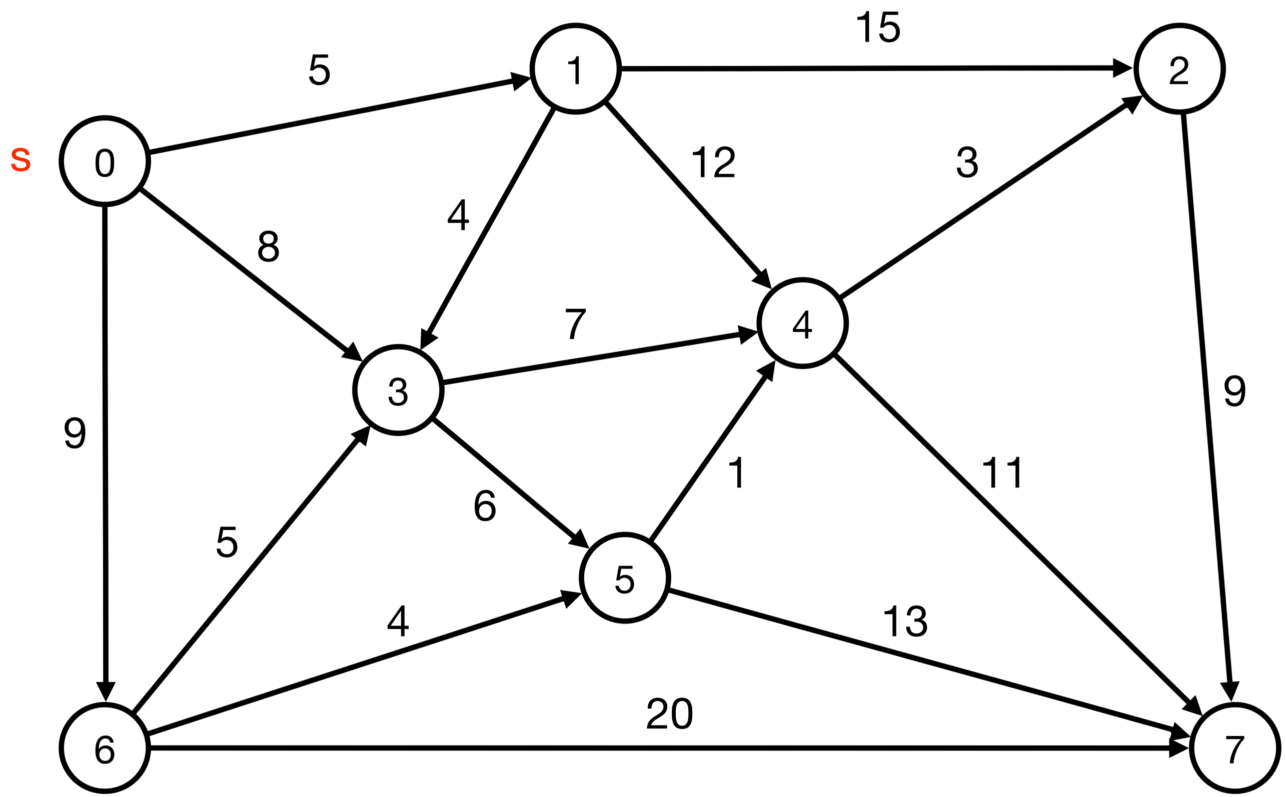
Philip Bille

Korteste veje

- Introduktion
- Egenskaber for korteste veje
- Dijkstras algoritme
- Korteste veje på DAGs

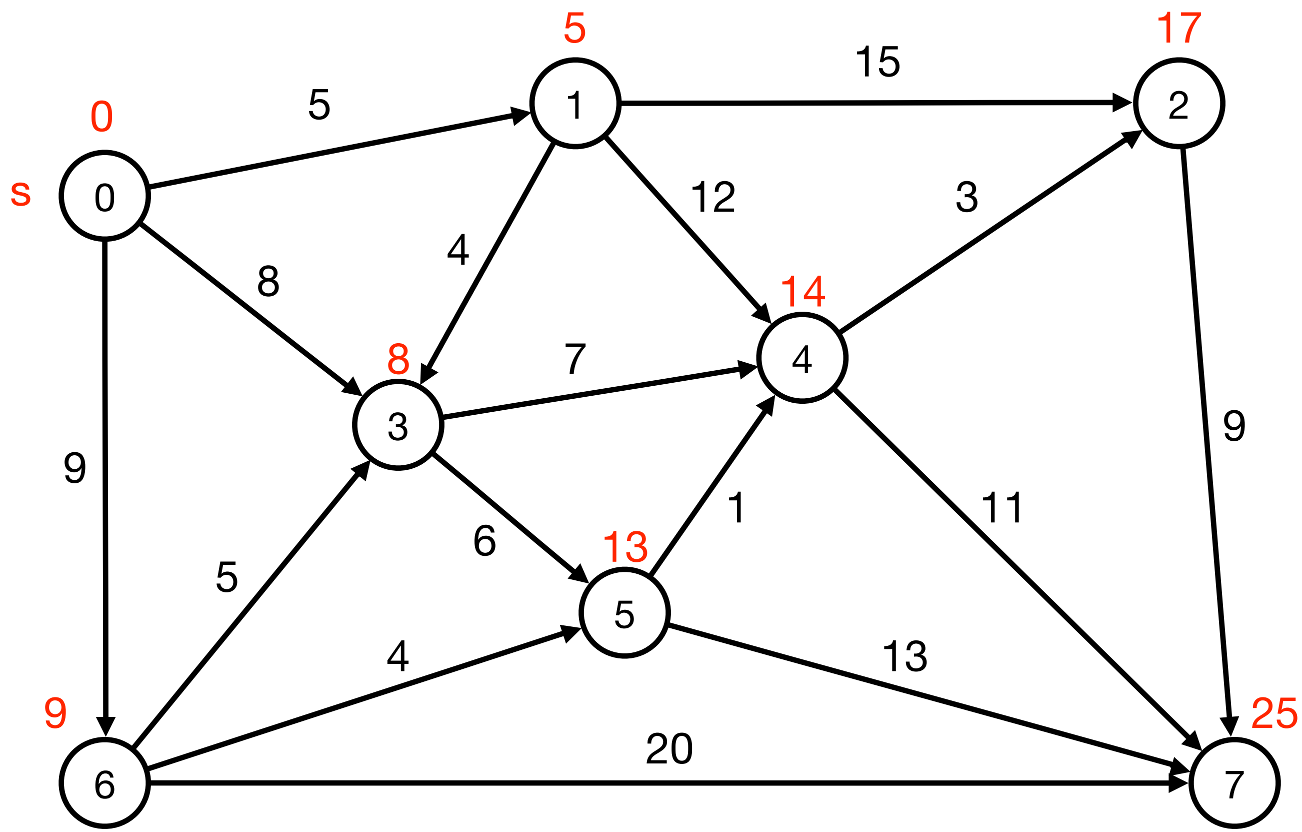
Introduktion

- Korteste veje. Givet en orienteret, vægtet graf G og en knude s, find korteste vej fra s til alle knuder i G.



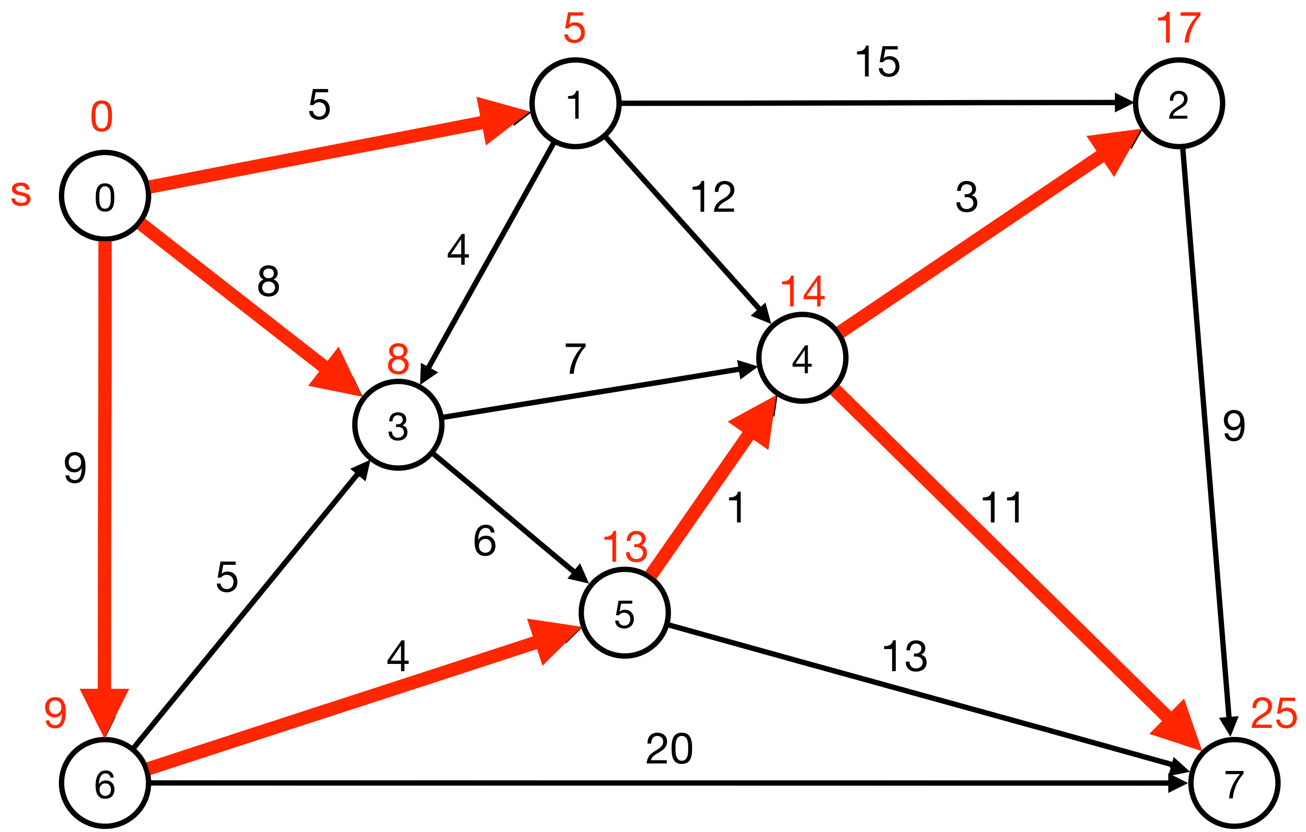
Introduktion

- Korteste veje. Givet en orienteret, vægtet graf G og en knude s, find korteste vej fra s til alle knuder i G.



Introduktion

- Korteste veje. Givet en orienteret, vægtet graf G og en knude s, find korteste vej fra s til alle knuder i G.
- Korteste veje træ. Repræsentér korteste veje som et træ fra s.



Anvendelser

- Google maps, bilnavigation, rutning i netværk, skedulering, pipelining, …

Korteste veje

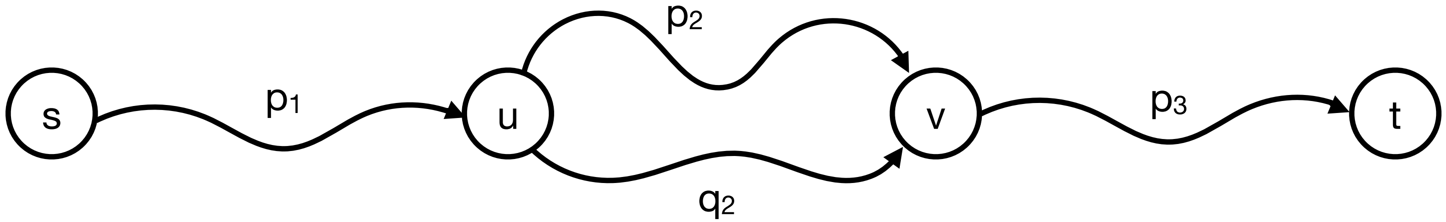
- Introduktion
- Egenskaber for korteste veje
- Dijkstras algoritme
- Korteste veje på DAGs

Korteste veje egenskaber

- Simplificerende antagelse.
  - Alle knuder kan nås fra s.
- $\Longrightarrow$ der findes altid (korteste) vej til en knude.

Korteste veje egenskaber

- Lemma. Enhver delvej af en korteste vej er en korteste vej.
- Bevis. Modstridsbevis.
  - Kig på en korteste vej p fra s til t bestående af p_1, p_2 og p_3.



  - Antag q_2 er kortere en delvej p_2.
  - $\Longrightarrow$ Da er p_1, q_2 og p_3 en kortere vej fra s til t end p.

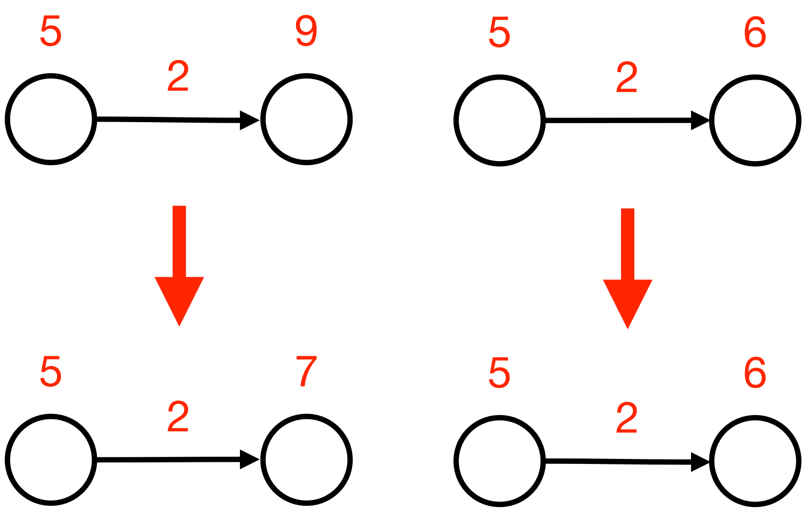
Korteste veje

- Introduktion
- Egenskaber for korteste veje
- Dijkstras algoritme
- Korteste veje på DAGs

Dijkstras algoritme

- Mål. Givet en orienteret og vægtet graf G med ikke-negative vægte og en knude s, beregn korteste vej fra s til alle andre knuder.

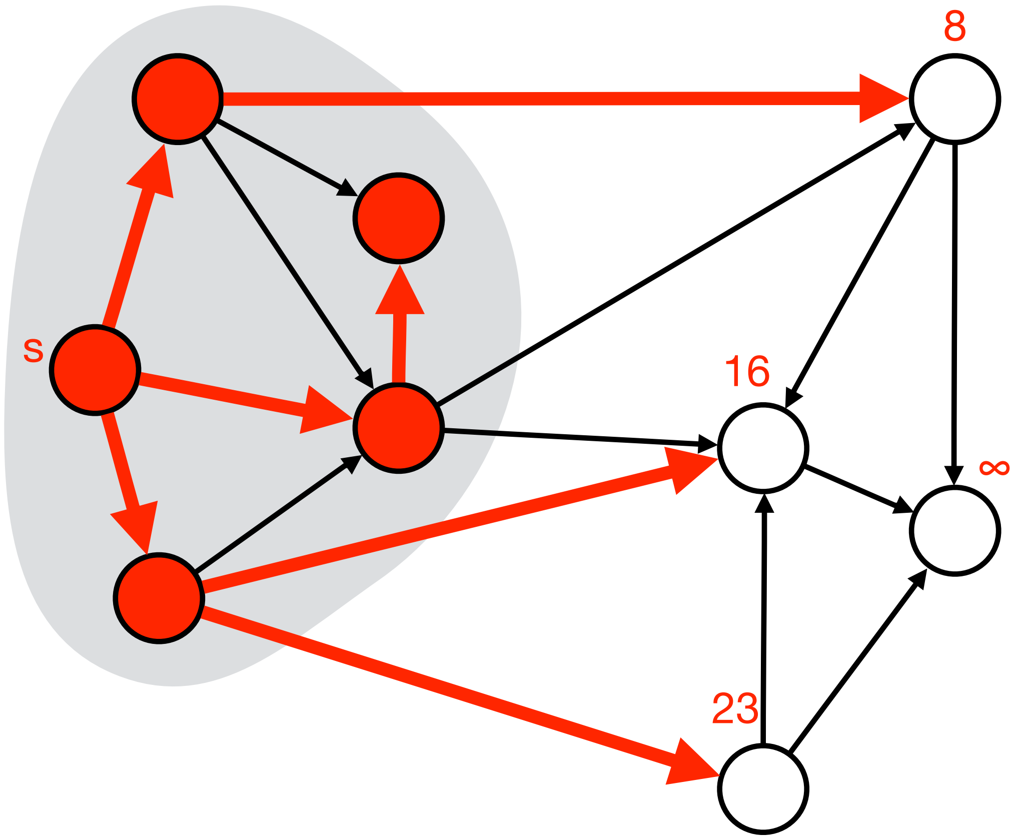
- Dijkstras algoritme.
  - Vedligeholder afstandsestimat v.d for hver knude v = længde af korteste kendte vej til v fra s.
  - Opdaterer afstandsestimater ved at afspænde (*relax*) kanter.

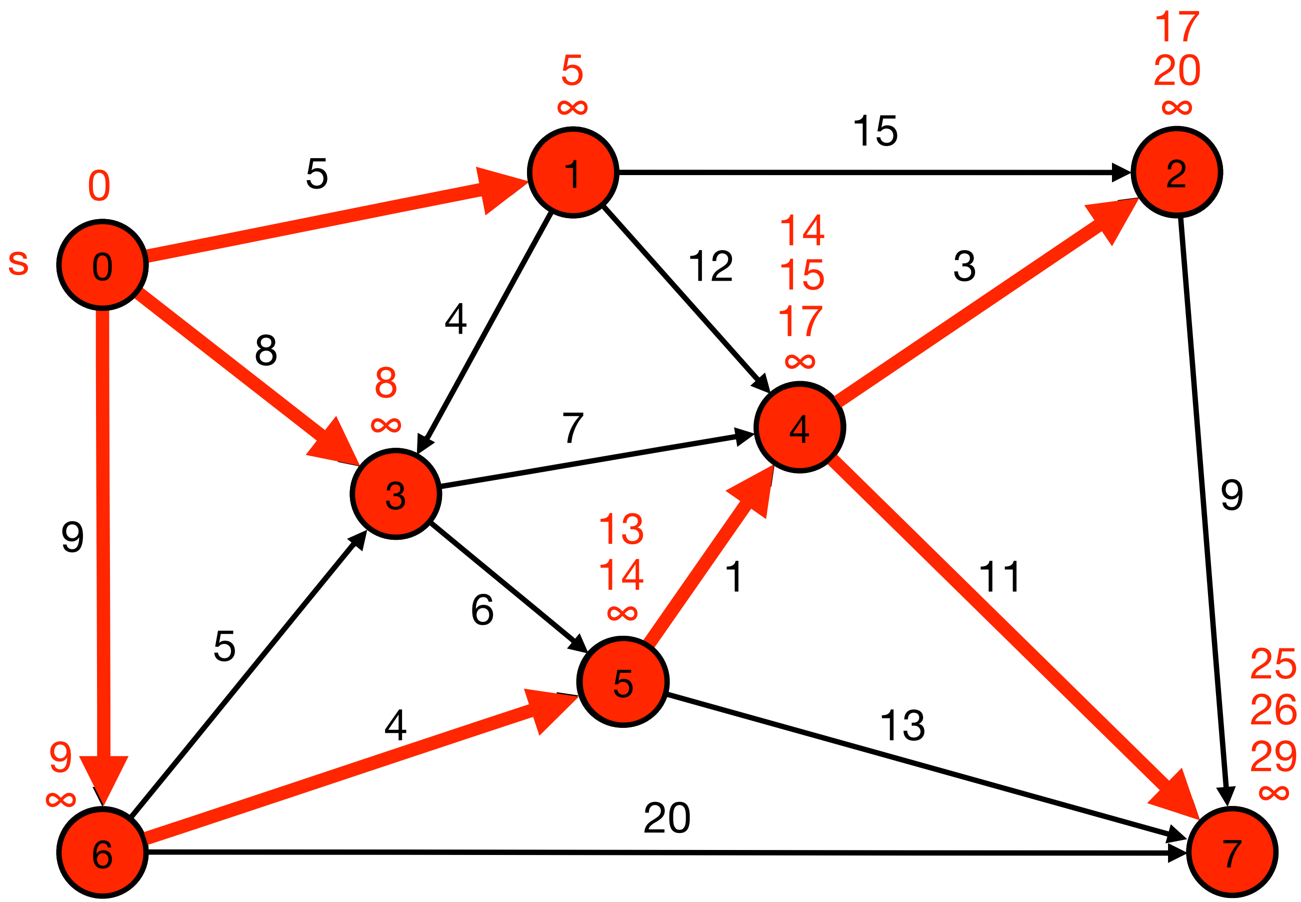



```
RELAX(u,v)
    if (v.d > u.d + w(u,v))
        v.d = u.d + w(u,v)
```

Dijkstras algoritme

- Sæt s.d = 0 og v.d = ∞ for alle knuder $v \in V \backslash \{s\}$.
- Opbyg et træ T fra s.
- I hvert skridt, tilføj knude v med mindste afstandsestimat til T.
- Afspænd alle kanter som v peger på.

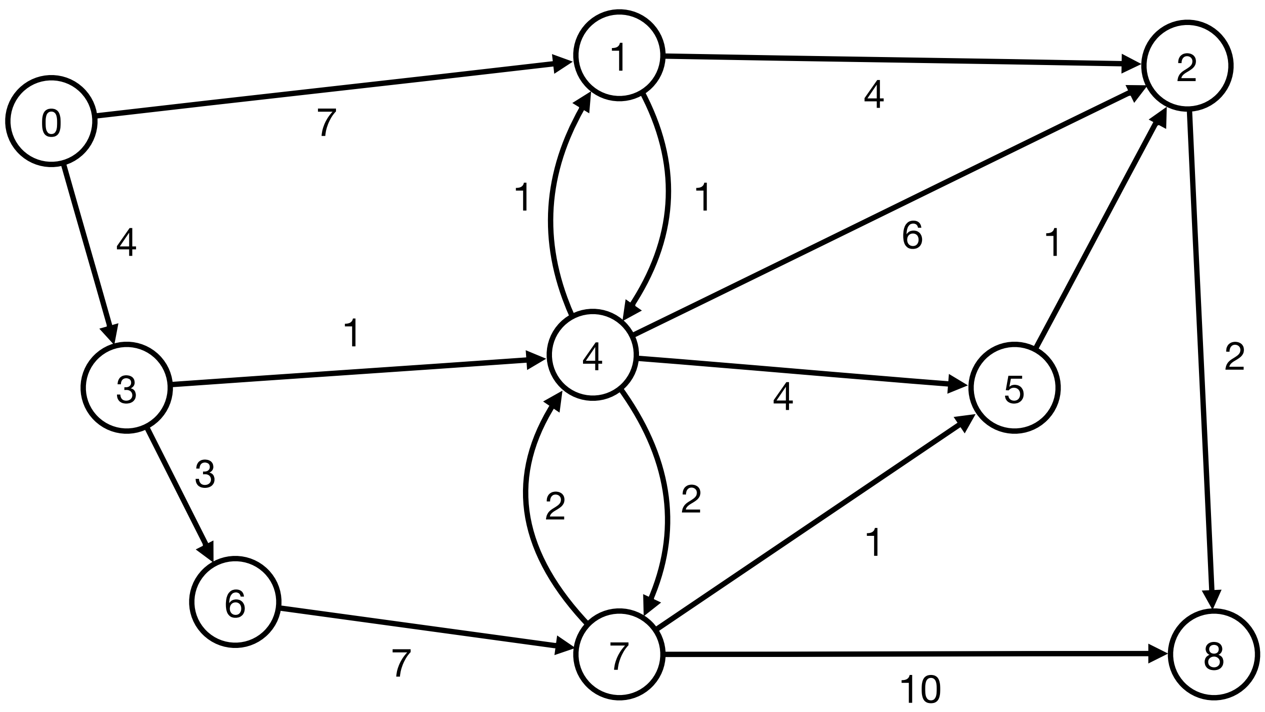




s
0
5
∞
17
20
∞
15
5
1
2
0
12
14
15
17
∞
3
4
8
8
∞
7
4
3
9
9
6
13
14
∞
1
11
5
5
4
13
25
26
29
∞
9
∞
20
6
7

Dijkstras algoritme

- Sæt s.d = 0 og v.d = ∞ for alle knuder v ∊ V\{s}.
- Opbyg et træ T fra s.
- I hvert skridt, tilføj knude v med mindste afstandsestimat til T.
- Afspænd alle kanter som v peger på.
- Opgave. Håndkør Dijkstras algoritme fra knude 0 på følgende graf.

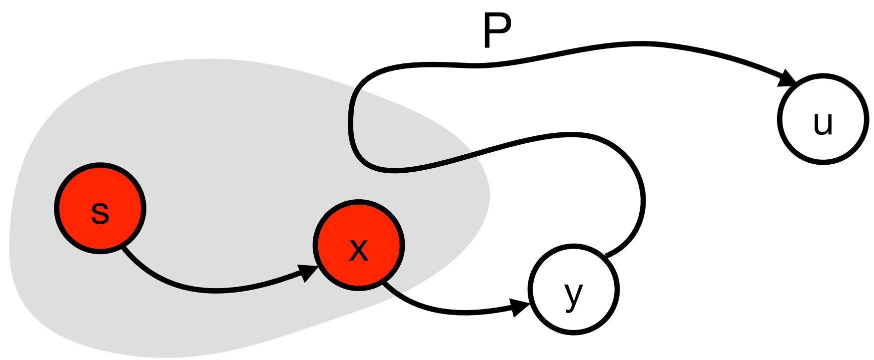


Dijkstras algoritme

- Notation. $\delta(s,v)$ er længden af den korteste vej fra s til v.
- Lemma. Når afstandsestimater opdateres med afspænding er $v.d \geq \delta(s,v)$ for alle knuder v.
- Bevis. Induktion over antallet af afspændinger.

Dijkstras algoritme

- Lemma. Dijkstras algoritme beregner $v.d = \delta(s,v)$ for alle knuder v.
- Bevis. Modstridsbevis.
  - Lad u være den første knude valgt af algoritmen så u.d er forkert. Lad P være den korteste vej fra s til u og lad (x,y) være første kant der forlader S. Kig på tidspunkt hvor algoritmen tilføjer u til S:



  - Vi har:
    1. $u.d \leq y.d$ (alg. valgte u før y).
    2. $u.d > \delta(s,u)$ (u var forkert).

Vi har: $u.d > \delta(s,u) = w(P)$ (2 + def.)

$\geq w(P \text{ til } x) + w(x,y)$ (P skåret af)

$= \delta(s,x) + w(x,y)$ (delvej af korteste vej er korteste vej)

- $x \in S$ så (x,y) afspændt så:

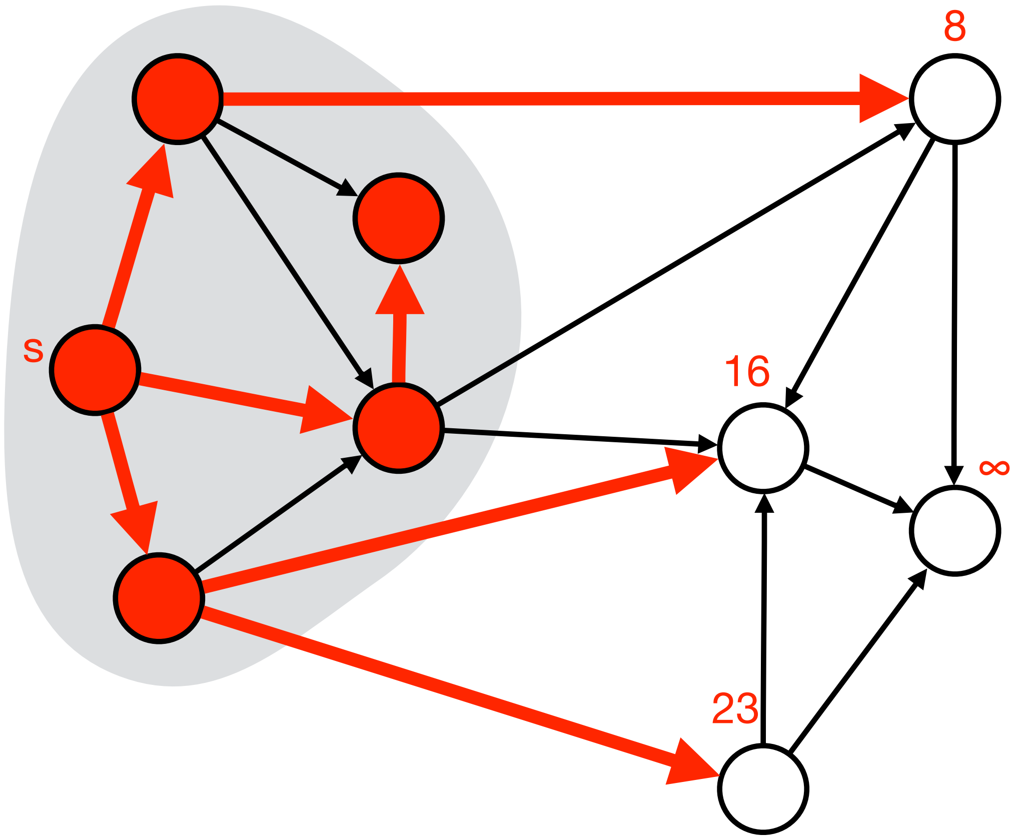
  $y.d \leq x.d + w(x,y)$

  $= \delta(s,x) + w(x,y)$ (u er første knude med forkert estimat så $x.d = \delta(s,x)$)

- $\Longrightarrow u.d > \delta(s,x) + w(x,y) \geq y.d$ i modstrid med 1.

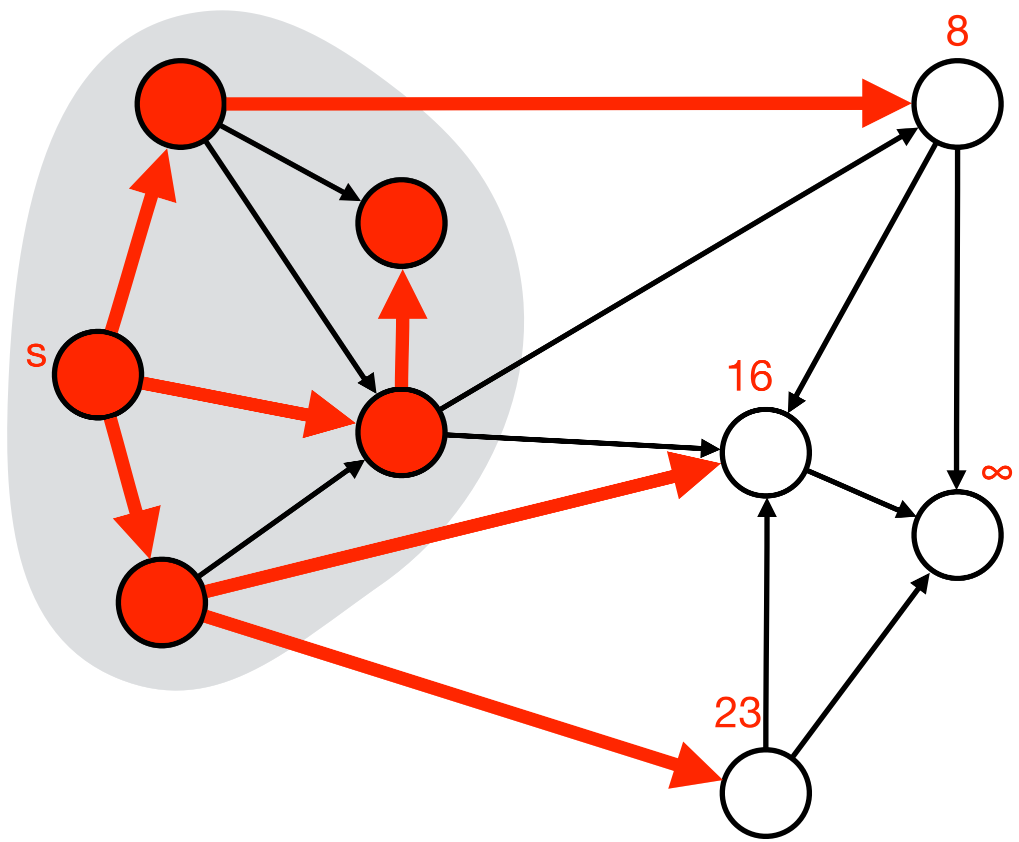
Dijkstras algoritme

- Implementation. Hvordan implementerer vi Dijkstras algoritme?
- Udfordring. Find knude med mindste afstandsestimat.



Dijkstras algoritme

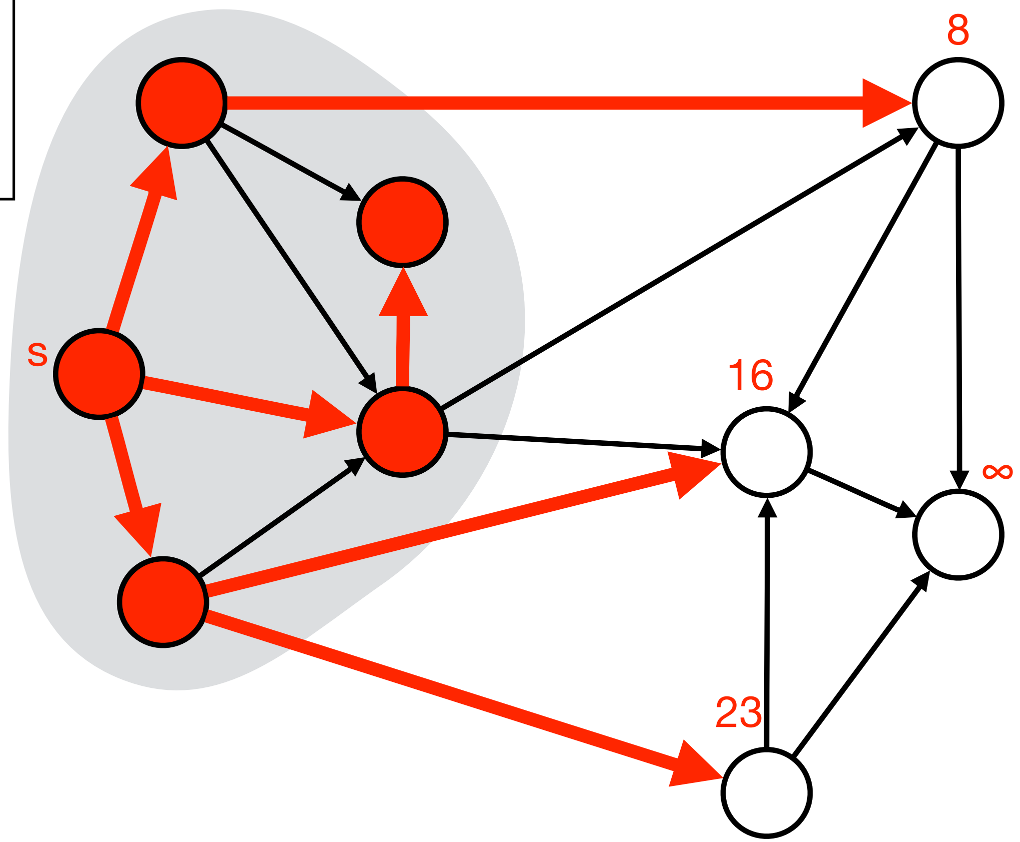
- Implementation. Vedligehold knuder med afstandsestimat i prioritetskø.
  - Nøgle af knude v = v.d.
  - I hvert skridt:
    - Find knude u med mindste afstandstandestimat = EXTRACT-MIN
    - Afspænd kanter som u peger på med DECREASE-KEY.



Dijkstras algoritme

```
DIJKSTRA(G, s)
    for alle knuder v∈V
        v.d = ∞
        v.π = null
        INSERT(P,v)
    DECREASE-KEY(P,s,0)
    while (P ≠ ∅)
        u = EXTRACT-MIN(P)
        for alle v som u peger på
            RELAX(u,v)
```

```
RELAX(u,v)
    if (v.d > u.d + w(u,v))
        v.d = u.d + w(u,v)
        DECREASE-KEY(P,v,v.d)
        v.π = u
```



- Tid.
  - n EXTRACT-MIN
  - n INSERT
  - < m DECREASE-KEY
- Samlet tid med min-hob. O(m log n)

Dijkstras algoritme

- Theorem. Dijkstra algoritme implementeret med en min-hob beregner korteste veje i O(m log n) tid.

- Grådighed. Dijkstras algoritme er eksempel på en grådig algoritme.

Dijkstras algoritme

- Prioritetskøer og Dijkstra. Kompleksitet af Dijkstras algoritme afhænger af prioritetskø:
  - n INSERT
  - n EXTRACT-MIN
  - < m DECREASE-KEY

Prioritetskø	INSERT	EXTRACT-MIN	DECREASE-KEY	Total
tabel	$O(1)$	$O(n)$	$O(1)$	$O(n^2)$
binær hob	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(m \log n)$
Fibonacci hob	$O(1)^\dagger$	$O(\log n)^\dagger$	$O(1)^\dagger$	$O(m + n \log n)$

† = amortiseret køretid

Edsger W. Dijkstra

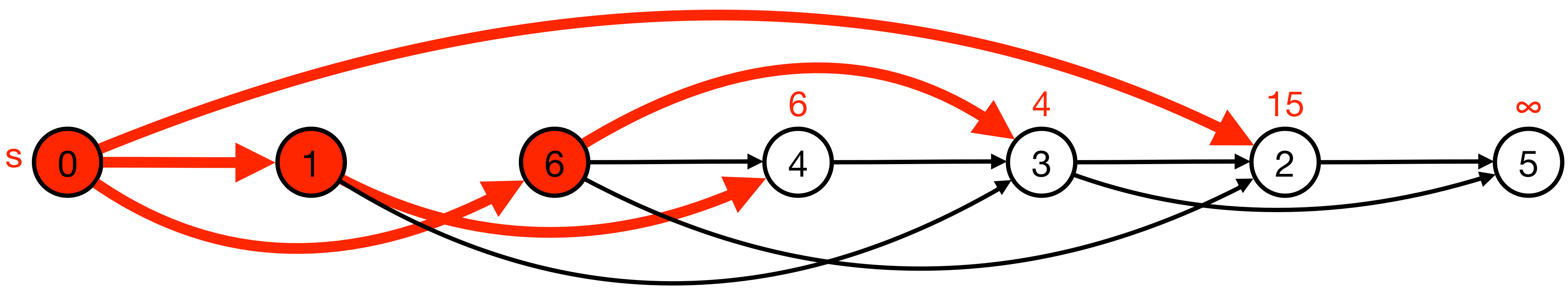
- Edsger Wybe Dijkstra (1930-2002)
- Dijkstra algoritme. "A note on two problems in connexion with graphs". Numerische Mathematik 1, 1959.
- Andre bidrag. Grundlæggende resultater i programmering, distribueret beregning, algoritmer, verifikation.
- Citater. “*Object-oriented programming is an exceptionally bad idea which could only have originated in California.*”
- “*The use of COBOL cripples the mind; its teaching should, therefore, be regarded as a criminal offence.*”
- “*APL is a mistake, carried through to perfection. It is the language of the future for the programming techniques of the past: it creates a new generation of coding bums.*”

Korteste veje

- Introduktion
- Egenskaber for korteste veje
- Dijkstras algoritme
- Korteste veje på DAGs

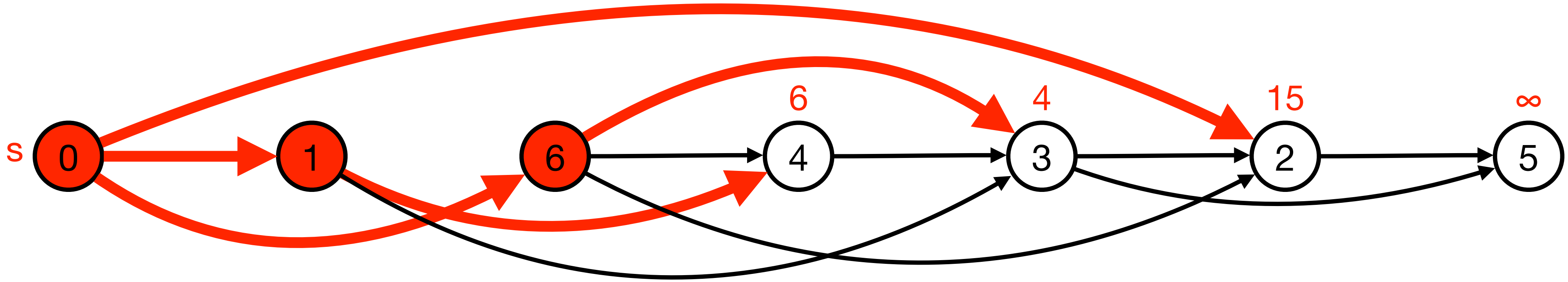
Korteste veje på DAGs

- Udfordring. Er det nemmere at beregne korteste veje på DAGs?
- DAG korteste veje algoritme.
  - Behandl knuder i topologisk orden.
  - For hver knude v, afspænd alle kanter fra v.
- Virker også for negative kanter.



Korteste veje på DAGs

- Lemma. Algoritme beregner $v.d = \delta(s,v)$ for alle knuder v.



- Bevis. Induktion over topologisk sortering af knuder $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$
- Basis. $v_0.d = 0 = \delta(v_0,v_0)$.
- Induktionsskridt. Kig på v_i for $i > 0$. Antag $v_j.d = \delta(s, v_j)$ for $j < i$

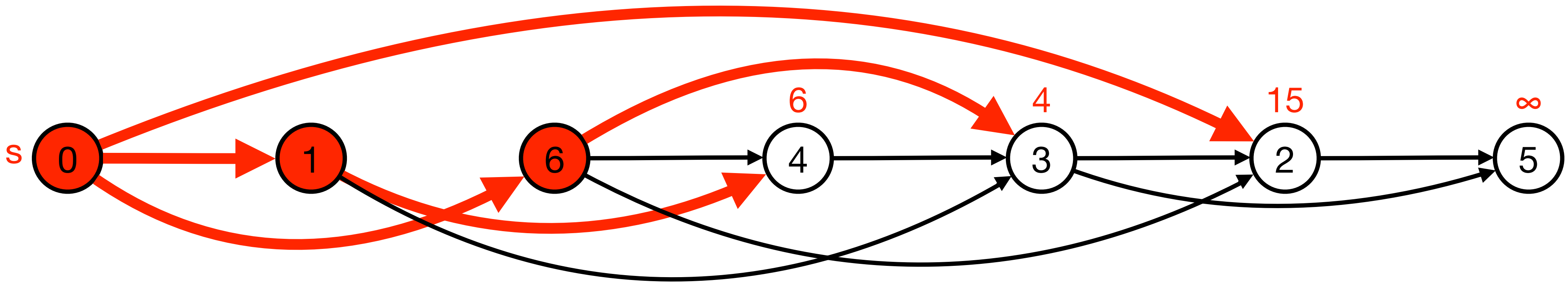
$v_i.d = \min(v_j.d + w(v_j, v_i))$ hvor (v_j, v_i) er kant i G så $j < i$.

$= \min(\delta(s, v_j) + w(v_j, v_i))$ (pga. induktionshypotese)

$= \delta(s, v_i)$ (ingen veje til v_i via senere knuder i topologisk orden)

Korteste veje på DAGs

- Implementation.
  - Sorter knuder i topologisk rækkefølge.
  - Afspænd kanter ud af hver knude.
- Samlet tid. O(m + n).
- Theorem. Vi kan beregne korteste veje i DAGs i O(m + n) tid.



Korteste veje varianter

- Knuder.
  - Enkelt kilde (*single-source*): fra s til alle andre knuder.
  - Enkelt kilde, enkelt dræn (*single-source single-target*): fra s til t.
  - Alle par (*all pairs*): mellem alle par af knuder.

- Begrænsninger på kantvægte.
  - Ikke-negative vægte.
  - Vilkårlige vægte.
  - Euklidiske vægte.

- Kredse.
  - Ingen kredse.
  - Ingen negative kredse.

Korteste veje

- Introduktion
- Egenskaber for korteste veje
- Dijkstras algoritme
- Korteste veje på DAGs