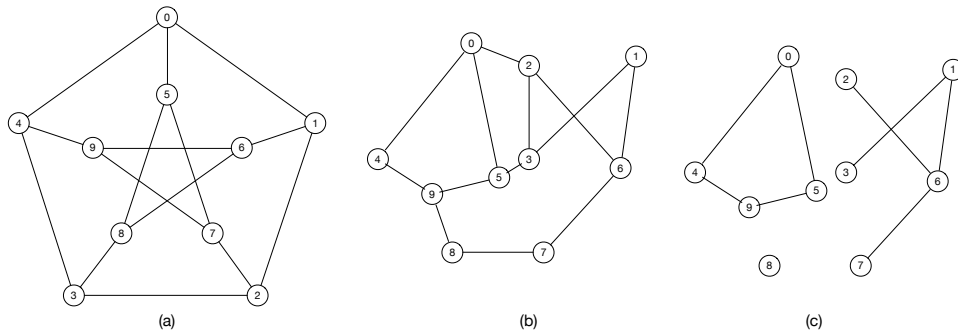


Ugeseddel: Introduktion til Grafer

Philip Bille

Om denne uge

Litteratur *Introduction to Algorithms*, Cormen, Rivest, Leisersons og Stein (CLRS): Introduktion til del VI + kap. 22.1-22.4 + appendix B.4-B.5.



Figur 1: Grafer til opgaverne. (a) kaldes *Petersen grafen*.

Opgaver

1 Repræsentation, egenskaber og algoritmer Kig på graferne i figur 1. Løs følgende opgaver.

1.1 [o] Vis incidenslister og incidensmatricer for (a) og (c).

1.2 [o] Håndkør DFS på (a) med udgangspunkt i knude 0. Antag incidenslisterne er sorteret. Angiv træ og start- og sluttider.

1.3 [o] Håndkør BFS på (a) med udgangspunkt i knude 0. Antag incidenslisterne er sorteret. Angiv træ og afstand for hver knude.

1.4 Angiv sammenhængskomponenterne i (a), (b) og (c).

1.5 Hvilke af (a), (b) og (c) er todelte?

2 Dybdeførst søgning med stak Forklar hvordan man kan implementere DFS uden at bruge rekursion. *Hint:* benyt i stedet en (eksplicit) stak.

3 Find en kreds Giv en algoritme, der afgør om en graf er *cyclisk*, dvs. indeholder en kreds. Hvor hurtigt kører din algoritme?

4 Labyrinter Lav opgave 3 i eksamenssættet fra 2010 (denne opgave er den samme i 02326 og 02105).

5 Antallet af korteste veje Giv en algoritme, der givet to knuder s og t i G , returnerer *antallet* af korteste veje i G mellem s og t .

6 Implementation af grafer Vi er interesseret i at understøtte følgende operationer på en dynamisk graf G .

- $\text{ADDEDGE}(u, v)$: tilføj en kant mellem knude u og v .
- $\text{ADJACENT}(u, v)$: afgør om knude u og v er naboer.
- $\text{NEIGHBOURS}(v)$: udskriv alle naboer af knude v .

Løs følgende opgaver.

6.1 Giv algoritmer til at understøtte operationerne på incidensmatrix. Analyser køretiden.

6.2 Giv algoritmer til at understøtte operationerne på incidensliste. Analyser køretiden.

6.3 [†] implementer operationerne på en incidensmatrix.

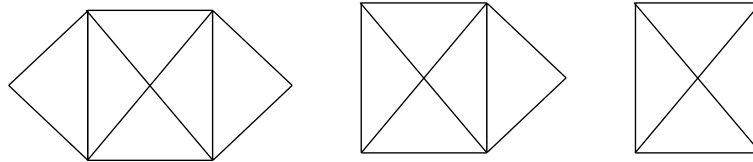
6.4 [†] implementer operationerne på en incidensliste.

7 Euler-ture og Euler-stier Lad G være en sammenhængende graf med n knuder og m kanter. En *Euler-tur* i G er en kreds der indeholder alle kanter i G netop en gang. En *Euler-sti* i G er en sti der indeholder alle kanter i G netop en gang. Løs følgende opgaver.

7.1 [*] Vis at G har en Euler-tur hvis og kun hvis alle knuder har lige grad.

7.2 [*] Vis at G har en Euler-sti hvis og kun hvis højst to knuder har ulige grad.

7.3 Hvilke af nedenstående tegninger kan du lave uden at løfte blyanten? Kan du starte og slutte samme sted?



7.4 Giv en $O(n + m)$ algoritme til at afgøre om G har en Euler-tur.

7.5 [*] Giv en $O(n + m)$ algoritme til at finde en Euler-tur i G hvis den findes.

8 Diameter i træer Lad T være et træ med n knuder. *Diameteren* af T er den længste korteste vej mellem par af knuder i T . Løs følgende opgaver.

8.1 Giv en algoritme til at finde diameteren af T i $O(n^2)$ tid.

8.2 [**] Giv en algoritme til at finde diameteren af T i $O(n)$ tid.

9 Frivillig afleveringsopgave: Kvadratet af en graf Kvadratet på en graf G er grafen $G^2 = (V, E^2)$ således at $(u, v) \in E^2$ hvis og kun hvis G indeholder en sti med højst to kanter mellem u og v . Giv algoritmer til at beregne G^2 i både incidensmatrix- og incidenslisterepræsentationen.