# Forén og find

- Introduktion
- Hurtig find
- Hurtig forening
- Vægtet forening
- Stikompression
- Dynamiske sammenhængskomponenter

Philip Bille

# Forén og find

- Introduktion
- Hurtig find
- Hurtig forening
- Vægtet forening
- Stikompression
- Dynamiske sammenhængskomponenter

## Forén og find

- Forén og find (*union-find*). Vedligehold en dynamisk familie af mængder under operationer:
  - INIT(n): opret mængder {0}, {1},..., {n-1}
  - UNION(i,j): forener de to mængder der indeholder i og j. Hvis i og j er i samme mængde skal der ingenting ske.
  - FIND(i): returnerer en repræsentant for mængden der indeholder i.

INIT(9)

{0} {1} {2} {3} {4} {5} {6} {7} {8}

{1, 0, 6} {8, 3, 2, 7} {4, 5} $\xrightarrow{\text{UNION}(5,0)}$ {1, 0, 6, 4, 5} {8, 3, 2, 7}

- Repræsentant kan være et hvilket som helst element i mængden.
- FIND(i) == FIND(j) hvis og kun hvis i og j er i samme mængde.

## Forén og find

- Anvendelser.
  - Dynamiske sammenhængskomponenter.
  - Mindste udspændende træ.
  - Unificering i logik og oversættere (afgør om udtryk er ens).
  - Nærmeste fælles forfader i træer.
  - Hoshen-Kopelman algoritme i fysik
  - Spil (Hex og Go)
  - Illustration af snedige teknikker til design af datastrukturer.

# Forén og find

- Introduktion
- Hurtig find
- Hurtig forening
- Vægtet forening
- Stikompression
- Dynamiske sammenhængskomponenter

## Hurtig find

- Hurtig find (*quick-find*). Vedligehold en tabel id[0..n-1] så id[i] er repræsentant for i.
  - INIT(n): sæt alle elementer til at være deres egen repræsentant
  - UNION(i,j): opdater repræsentant for alle elementer i den ene mængde.
  - FIND(i): returner repræsentant.

INIT(9)

{0} {1} {2} {3} {4} {5} {6} {7} {8}

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| id[] | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |

{1, 0, 6} {8, 3, 2, 7} {4, 5} $\xrightarrow{\text{UNION(5,0)}}$ {1, 0, 6, 4, 5} {8, 3, 2, 7}

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| id[] | 1 | 1 | 3 | 3 | 5 | 5 | 1 | 3 | 3 |

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 | 3 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 |

## Hurtig find

```
INIT(n):
   for k = 0 to n-1
      id[k] = k
```

```
FIND(i):
   return id[i]
```

```
UNION(i,j):
   iID = FIND(i)
   jID = FIND(j)
   if (iID ≠ jID)
      for k = 0 to n-1
         if (id[k] == iID)
            id[k] = jID
```

{1, 0, 6} {8, 3, 2, 7} {4, 5} $\xrightarrow{\text{UNION(5,0)}}$ {1, 0, 6, 4, 5} {8, 3, 2, 7}

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| id[] | 1 | 1 | 3 | 3 | 5 | 5 | 1 | 3 | 3 |

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 | 3 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 |

- Tid.
  - O(n) tid for INIT, O(n) tid for UNION og O(1) tid for FIND.

## Hurtig find

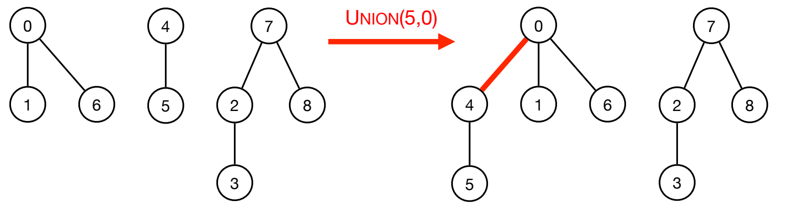
- Theorem. Vi kan løse forén og find med n elementer i
  - O(n) tid for INIT
  - O(1) tid for FIND
  - O(n) tid for UNION

# Forén og find

- Introduktion
- Hurtig find
- **Hurtig forening**
- Vægtet forening
- Stikompression
- Dynamiske sammenhængskomponenter

## Hurtig forening

- Hurtig forening (*quick-union*). Vedligehold hver mængde som et rodfæstet træ repræsenteret ved tabel p[0..n-1] af forældrepegere. Roden af træ er repræsentant for mængde og p[rod] = rod.
  - INIT(n): lav n træer med et element hver.
  - UNION(i,j): hvis FIND(i) ≠ FIND(j), gør rod af det ene træ til barn af roden af det andet træ.
  - FIND(i): følg sti til rod og returner rod.




| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| p[] | 0 | 0 | 7 | 2 | 4 | 4 | 0 | 7 | 7 |

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 7 | 2 | 0 | 4 | 0 | 7 | 7 |

## Hurtig forening

- INIT(n): lav n træer med et element hver.
- UNION(i,j): hvis FIND(i) ≠ FIND(j), gør rod af det ene træ til barn af roden af det andet træ.
- FIND(i): følg sti til rod og returner rod.

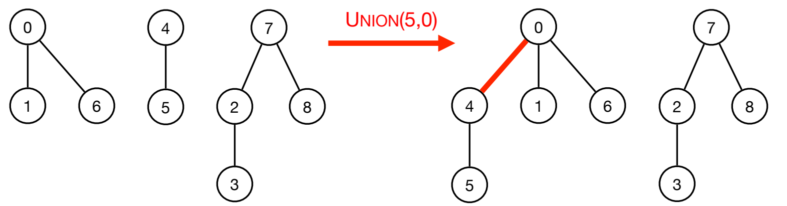
- Opgave. Vis datastruktur efter hver operation i følgende sekvens.
  - INIT(7), UNION(0,1), UNION(2,3), UNION(5,1), UNION(5,0), UNION(0,3), UNION(5,2), UNION(4,3), UNION(4,6).

## Hurtig forening

```
INIT(n):
   for k = 0 to n-1
      p[k] = k
```

```
FIND(i):
   while (i != p[i])
      i = p[i]
   return i
```

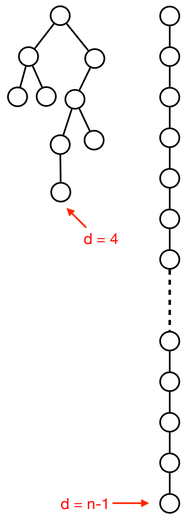
```
UNION(i,j):
   r_i = FIND(i)
   r_j = FIND(j)
   if (r_i ≠ r_j)
      p[r_i] = r_j
```




- Tid.
  - O(n) tid for INIT, O(d) tid for UNION og O(d) tid for FIND.

## Hurtig forening

- Theorem. Vi kan løse forén og find med n elementer i
  - O(n) tid for INIT
  - O(d) tid for FIND
  - O(d) tid for UNION
- Dybden d af T er den maksimale længde af en sti fra rod til blad.
- Dårlig nyhed. Dybden kan være n-1.
- Udfordring. Kan vi sætte sammen træerne snedigt sammen så vi begrænser dybden?

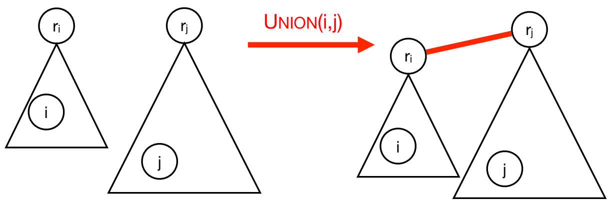



## Forén og find

- Introduktion
- Hurtig find
- Hurtig forening
- **Vægtet forening**
- Stikompression
- Dynamiske sammenhængskomponenter

## Vægtet forening

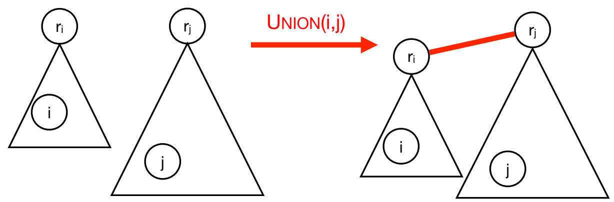
- Vægtet forening (*weighted quick-union*). Udvidelse af hurtig forening. Vedligehold tabel sz[1..n] med størrelse af hver knude = antallet af knuder i deltræ.
  - INIT: (næsten) som før.
  - FIND: som før.
  - UNION(i,j): hvis FIND(i) ≠ FIND(j), gør rod af det mindste træ til barn af roden af det største træ.
- Intuition. Vægtet forening balancerer træerne.




$sz[r_j] = sz[r_i] + sz[r_j]$

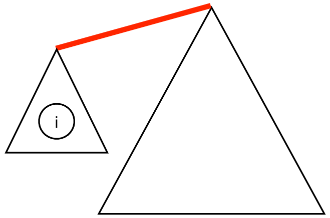
## Vægtet forening

```
UNION(i,j):
   r_i = FIND(i)
   r_j = FIND(j)
   if (r_i ≠ r_j)
      if (sz[r_i] < sz[r_j])
         p[r_i] = r_j
         sz[r_j] = sz[r_i] + sz[r_j]
      else
         p[r_j] = r_i
         sz[r_i] = sz[r_i] + sz[r_j]
```



## Vægtet forening

- Lemma. Med vægtet forening er dybden af en knude højst $\log_2 n$.
- Bevis.
  - Kig på en knude i med dybde $d_i$.
  - Initielt er $d_i = 0$.
  - $d_i$ øges med 1 når træet med i forenes med et større træ.
  - Det forenede træ er mindst dobbelt så stort.
  - Vi kan fordoble størrelse af træer højst $\log_2 n$ gange.
  - $\Longrightarrow d_i \leq \log_2 n$.




## Vægtet forening

- Theorem. Vi kan løse forén og find med n elementer i
  - O(n) tid for INIT
  - O(log n) tid for FIND
  - O(log n) tid for UNION

## Forén og find

| Datastruktur | UNION | FIND |
|---|---|---|
| hurtig find | O(n) | O(1) |
| hurtig forening | O(n) | O(n) |
| vægtet forening | O(log n) | O(log n) |

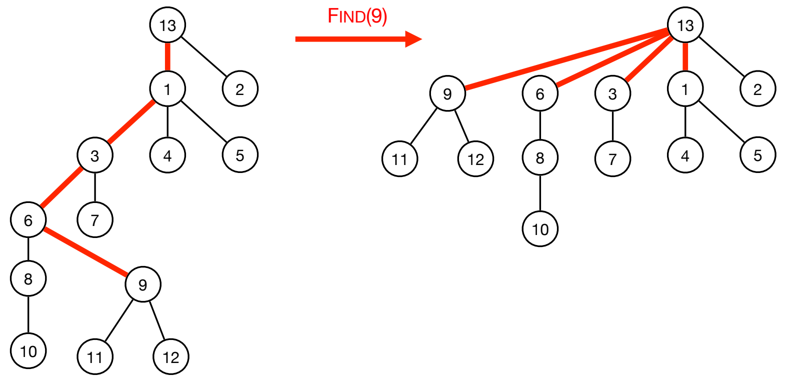
- Udfordring. Kan vi gøre det endnu bedre? Hvad er den bedste man kan håbe på?

## Forén og find

- Introduktion
- Hurtig find
- Hurtig forening
- Vægtet forening
- Stikompression
- Dynamiske sammenhængskomponenter

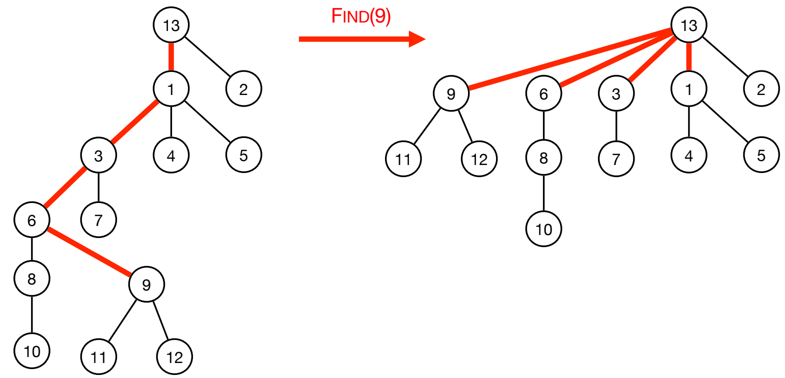
## Stikompression

- Stikompression. Komprimer stien ved Find = alle knuder på sti bliver barn af rod.
- Ændrer ikke på tid for en Find operation. Efterfølgende Find operationer bliver hurtigere.
- Virker både med hurtig forening og vægtet forening.




## Stikompression

- Theorem [Tarjan 1975]. Med stikompression tager enhver sekvens af m Find og Union operationer over n elementer O(n + m α(m,n)) tid.
- α(m,n) er den inverse til Ackermanns funktion. α(m,n) ≤ 5 for ethvert praktisk input.
- Theorem [Fredman-Saks 1985]. Det er ikke muligt at understøtte m Find og Union operationer O(n + m) tid.




## Forén og find

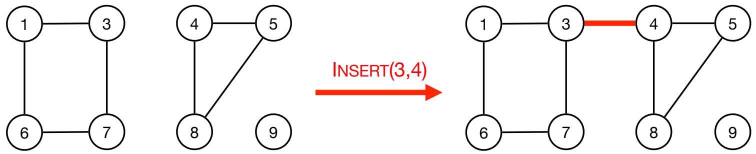
| Datastruktur | m Union og Find |
|---|---|
| hurtig find | O(mn) |
| hurtig forening | O(mn) |
| vægtet forening | O(n + mlog n) |
| vægtet forening + stikompression | O(n + m α(m,n)) |
| umuligt | O(n + m) |

## Forén og find

- Introduktion
- Hurtig find
- Hurtig forening
- Vægtet forening
- Stikompression
- Dynamiske sammenhængskomponenter

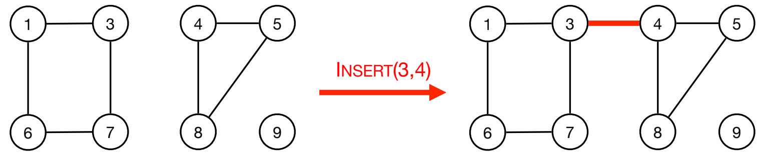
## Dynamiske sammenhængskomponenter

- Dynamiske sammenhængskomponenter. Vedligehold en dynamisk graf under operationer.
  - INIT(n): opret en graf G med n knuder og ingen kanter.
  - CONNECTED(u,v): afgør om u og v er sammenhængende.
  - INSERT(u, v): tilføj kant (u,v). Vi antager (u,v) ikke allerede findes.




## Dynamiske sammenhængskomponenter

- Implementation med forén og find.
  - INIT(n): initialiser en forén og find datastruktur med n elementer.
  - CONNECTED(u,v): FIND(u) == FIND(v).
  - INSERT(u, v): UNION(u,v)




## Dynamiske sammenhængskomponenter

- Theorem. Vi kan løse dynamiske sammenhængskomponenter i en graf med n knuder i
  - O(n) tid for INIT
  - O(log n) tid for CONNECTED
  - O(log n) tid for INSERT

# Forén og find

- Introduktion
- Hurtig find
- Hurtig forening
- Vægtet forening
- Stikompression
- Dynamiske sammenhængskomponenter