Introduktion

- Algoritmer og datastrukturer
- Toppunkter
  - Algoritme 1
  - Algoritme 2
  - Algoritme 3

Philip Bille

Introduktion

- Algoritmer og datastrukturer
- Toppunkter
  - Algoritme 1
  - Algoritme 2
  - Algoritme 3

Algoritmer og datastrukturer

- Algoritmisk problem. Præcist defineret relation mellem input og output.
- Algoritme. Metode til at løse et algoritmisk problem.
  - Beskrevet i diskrete og entydige skridt.
  - Matematisk abstraktion af program.
- Datastruktur. Metode til at organise data så det kan søges i eller manipuleres.

Eksempel: Maksimalt tal

- Maksimalt tal. Givet en tabel A[0..n-1], find et tal i, således at A[i] er maksimalt.
  - Input. Tabel A[0..n-1].
  - Output. Et tal i, $0 \leq i < n$, så $A[i] \geq A[j]$ for alle indgange $j \neq i$.
- Algoritme.
  - Gennemløb A og vedligehold indeks af nuværende maksimale indgang.
  - Returner indeks.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	3	7	15	17	11	2	3	6	8	7	5	9	5	23

Beskrivelse af algoritmer

- Naturligt sprog.
  - Gennemløb A og vedligehold indeks af nuværende maksimale indgang.
  - Returner indeks.
- Program.

```
public static int findMax(int[] A) {
   int max = 0;
   for(i = 0; i < n; i++)
        if (A[i] > A[max]) max = i;
   return max;
}
```

- Pseudokode.

```
FINDMAX(A, n)
   max = 0
   for i = 0 to n-1
      if (A[i] > A[max]) max = i
   return max
```

Introduktion

- Algoritmer og datastrukturer
- Toppunkter
  - Algoritme 1
  - Algoritme 2
  - Algoritme 3

Toppunkter

- Toppunkt. Indgang A[i] er et toppunkt hvis A[i] er mindst ligeså stort som dets naboer:
  - A[i] toppunkt hvis A[i-1] ≤ A[i] ≥ A[i+1] for i ∊ {1, .., n-2}
  - A[0] toppunkt A[0] ≥ A[1] og A[n-1] er toppunkt hvis A[n-2] ≤ A[n-1]. (Tænk A[-1] = A[n] = -∞).

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	3	7	15	17	11	2	3	6	8	7	5	9	5	23

- Toppunktsproblem. Givet en tabel A[0..n-1], find *et* tal i, således at A[i] toppunkt.
  - Input. En tabel A[0..n-1].
  - Output. Et tal i, 0 ≤ i < n, så A[i] er et toppunkt.

Introduktion

- Algoritmer og datastrukturer
- Toppunkter
  - Algoritme 1
  - Algoritme 2
  - Algoritme 3

Algoritme 1

- Algoritme 1. For hver indgang i A, check om den er et toppunkt. Returner indeks på første toppunkt.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	3	7	15	17	11	2	3	6	8	7	5	9	5	23

- Pseudokode.

```
TOPPUNKT1(A, n)
   if A[0] ≥ A[1] return 0
   for i = 1 to n-2
      if A[i-1] ≤ A[i] ≥ A[i+1] return i
   if A[n-2] ≤ A[n-1] return n-1
```

- Udfordring. Hvordan analyserer vi algoritmen?

Teoretisk analyse

- Køretid/tidskompleksitet.
  - T(n) = antallet af skridt som algoritmen udfører på et input af størrelse n.
- Skridt.
  - Læsning/skrivning til hukommelse (x := y, A[i], i = i + 1, ...)
  - Arithmetiske/boolske operationer (+, -, *, /, %, &&, ||, &, |, ^, ~)
  - Sammenligninger (<, >, =<, =>, =, ≠)
  - Programflow (if-then-else, while, for, goto, funktionskald, ..)
- Værstefaldstidskompleksitet (worst-case complexity).
  - Interesseret (næsten altid) i værstefaldstidskompleksitet = maksimal køretid over alle input af størrelse n.

Teoretisk analyse

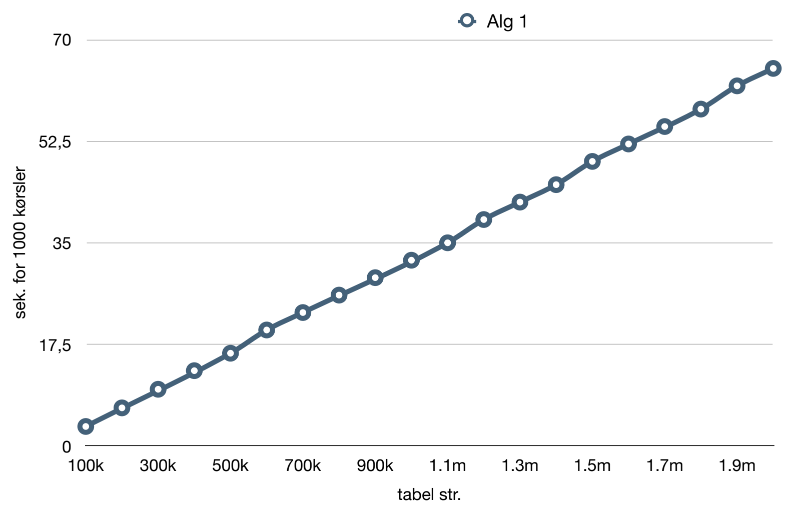
- Køretid. Hvad er køretiden T(n) for algoritmen?

```
TOPPUNKT1(A, n)
   if A[0] ≥ A[1] return 0                  c1
   for i = 1 to n-2                         (n-2)·c2
      if A[i-1] ≤ A[i] ≥ A[i+1] return i
   if A[n-2] ≤ A[n-1] return n-1            c3
```

$$T(n) = c_1 + (n-2)\cdot c_2 + c_3$$

- T(n) er en *lineær funktion* af n: T(n) = an + b, for passende konstanter a og b.
- Asymptotisk notation. T(n) = Θ(n)

- Eksperimentiel analyse.
  - Hvad er køretid af algoritmen i praksis?
  - Hvordan passer den teoretisk analyse med praksis?



Toppunkter

- Algoritme 1 finder et toppunkt i Θ(n) tid.
- Stemmer overens med praksis.
- Udfordring. Kan vi gøre det bedre?

Introduktion

- Algoritmer og datastrukturer
- Toppunkter
  - Algoritme 1
  - Algoritme 2
  - Algoritme 3

Algoritme 2

- Observation. Et (globalt) maksimalt tal i A er et toppunkt.
- Algoritme 2. Find et maksimalt tal i A med FINDMAX(A, n).

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	3	7	15	17	11	2	3	6	8	7	5	9	5	23

```
FINDMAX(A, n)
   max = 0
   for i = 0 to n-1
      if (A[i] > A[max]) max = i
   return max
```

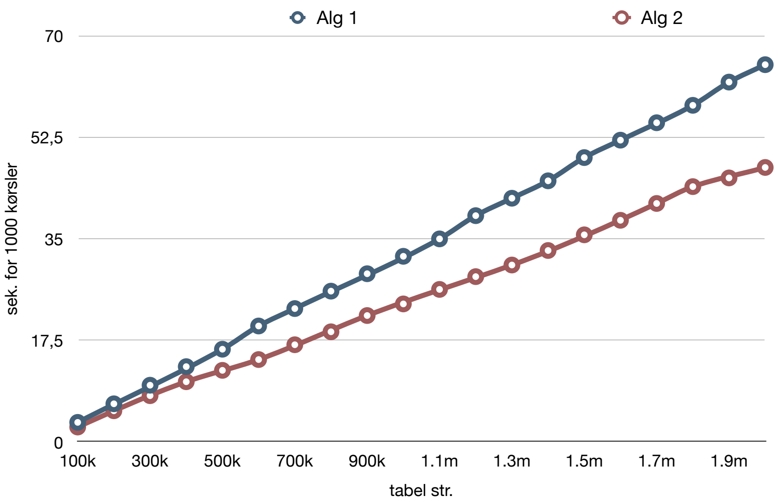
Teoretisk analyse

- Køretid. Hvad er køretiden T(n) for algoritmen?

```
FINDMAX(A, n)
   max = 0                              c4
   for i = 0 to n-1                     n·c5
      if (A[i] > A[max]) max = i
   return max                           c6
```

$T(n) = c_4 + n \cdot c_5 + c_6 = \Theta(n)$

- Ekperimentiel analyse. Bedre konstanter?



Toppunkter

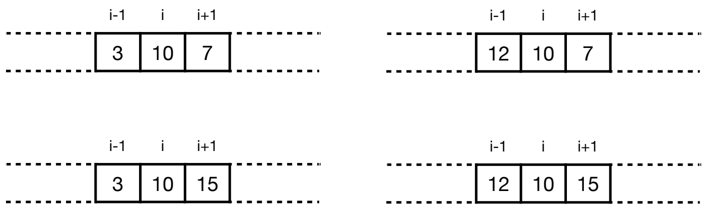
- Teoretisk
  - Algoritme 1 og 2 finder et toppunkt i Θ(n) tid.
- Eksperimentielt
  - Algoritme 1 og 2 kører i Θ(n) tid i praksis.
  - Algoritme 2 er en konstant faktor hurtigere end algoritme 1.
- Udfordring. Kan vi gøre det betydeligt bedre?

Introduktion

- Algoritmer og datastrukturer
- Toppunkter
  - Algoritme 1
  - Algoritme 2
  - Algoritme 3

Algoritme 3

- Snedig ide.
  - Kig på en vilkårlig indgang A[i] og dens naboer A[i-1] og A[i+1].
  - Hvor kan vi finde et toppunkt ifht. A[i]?
    - Naboer er ≤ A[i] ⟹ A[i] er toppunkt.
    - Ellers er A voksende i mindst en retning ⟹ der findes toppunkt i den retning.



- Udfordring. Hvordan kan vi bruge ide til at lave en effektiv algoritme?

Algoritme 3

- Algoritme 3.
  - Kig på midterste indgang A[m] og naboer A[m-1] og A[m+1].
  - Hvis A[m] er toppunkt, returner m.
  - Ellers fortsæt søgning rekursivt i halvdel af tabel hvor nabo er større end A[m].

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	3	7	15	17	11	2	3	6	8	7	5	9	5	23

Algoritme 3

- Algoritme 3.
  - Kig på midterste indgang A[m] og naboer A[m-1] og A[m+1].
  - Hvis A[m] er toppunkt, returner m.
  - Ellers fortsæt søgning rekursivt i halvdel af tabel hvor nabo er større end A[m].

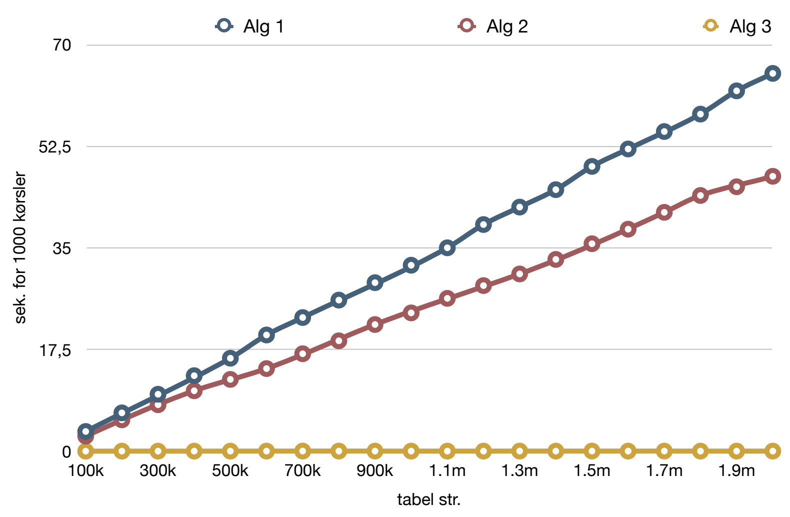
```
TOPPUNKT3(A,i,j)
   m = ⌊(i+j)/2)⌋
   if A[m] ≥ naboer return m
   elseif A[m-1] > A[m]
      return TOPPUNKT3(A,i,m-1)
   elseif A[m] < A[m+1]
      return TOPPUNKT3(A,m+1,j)
```

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	3	7	15	17	11	2	3	6	8	7	5	9	5	23

Algoritme 3

```
TOPPUNKT3(A,i,j)
   m = ⌊(i+j)/2)⌋
   if A[m] ≥ naboer return m
   elseif A[m-1] > A[m]
      return TOPPUNKT3(A,i,m-1)
   elseif A[m] < A[m+1]
      return TOPPUNKT3(A,m+1,j)
```

- Køretid.
- Et rekursivt kald tager konstant tid.
- Hvor mange rekursive kald laver vi?
- Et rekursivt kald halverer størrelsen af tabellen vi kigger på. Vi stopper når tabellen har størrelse 1.
  - 1. rekursive kald: n/2
  - 2. rekursive kald: n/4
  - ....
  - k'te. rekursive kald: $n/2^k$
  - ....
- ⟹ Efter ~$\log_2 n$ rekursive kald har tabellen størrelse ≤ 1.
- ⟹ Køretiden er Θ(log n)
- Ekperimentiel analyse. Betydeligt bedre?



Toppunkter

- Teoretisk
  - Algoritme 1 og 2 finder et toppunkt i Θ(n) tid.
  - Algoritme 3 finder et toppunkt i Θ(log n) tid.
- Eksperimentielt
  - Algoritme 1 og 2 kører i Θ(n) tid i praksis.
  - Algoritme 2 er en konstant faktor hurtigere end algoritme 1.
  - Algoritme 3 er meget, meget hurtigere end algoritme 1 og 2.

Introduktion

- Algoritmer og datastrukturer
- Toppunkter
  - Algoritme 1
  - Algoritme 2
  - Algoritme 3