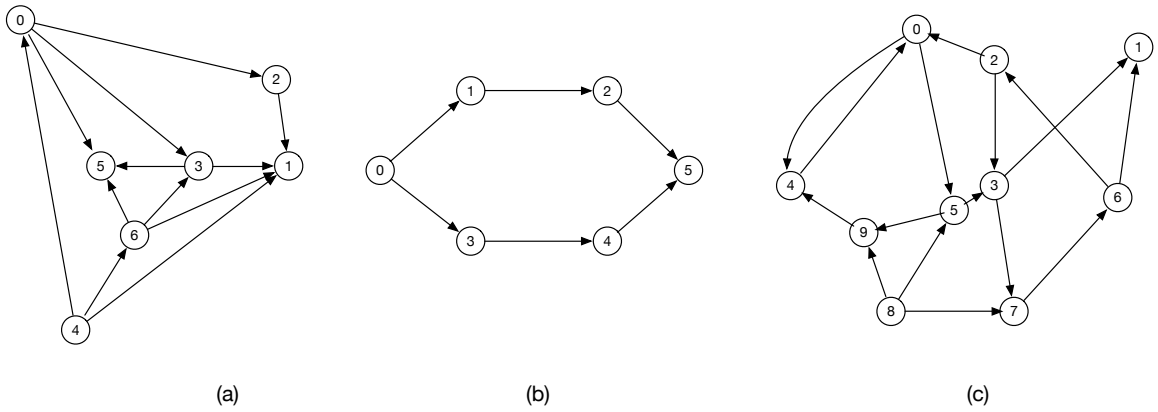
Ugeseddel: Orienterede grafer

Philip Bille

Om denne uge

Litteratur *Introduction to Algorithms*, Cormen, Rivest, Leisersons og Stein (CLRS): Introduktion til del VI + kap. 22.1-22.4 + appendix B.4-B.5.



Figur 1: Grafer til opgaverne.

Opgaver

1 Repræsentation, egenskaber og algoritmer Kig på graferne i figur 1. Løs følgende opgaver.

1.1 [*o*] Vis incidenslister og incidensmatricer for (a) og (b).

1.2 [*o*] Håndkør DFS eller BFS fra knude 4 i (a) og knude 5 i (c).

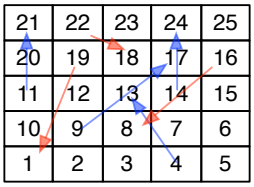
1.3 Hvilke af (a) og (c) er DAGs? Hvis grafen er en DAG, så find en topologisk sortering med den rekursive algoritme til topologisk sortering. Hvis grafen ikke er en DAG så angiv en kreds.

1.4 Angiv stærke sammenhængskomponenter i (a) og (c).

1.5 Hvor mange topologiske sorteringer har (b)?

1.6 Hvor mange stærke sammenhængskomponenter er der i en DAG?

2 Slanger og stiger Slanger og stiger (*snakes and ladders*) er et klassisk brætspil. Vi kigger på følgende variant. Spillet foregår på et $n \times n$ gitter, med felter nummeret fortløbende fra 1 til n^2. Se figur. Særlige par af felter er *slanger*, der fører nedad og *stiger* der fører op. Hvert felt kan være endepunkt for højst en stige eller slange.



Målet med spillet er at komme fra det første felt til det sidste med færrest mulige skridt. Man starter med at placere sin brik i felt 1. I hvert skridt kan man flytte sin brik *højst* 5 felter frem. Hvis en brik ender i toppen af en slange flytter den til bunden af slangen og tilsvarende hvis en brik ender i bunden af en stige flytter den til toppen af stigen. Giv en algoritme til at beregne det mindste antal skridt det kræver for at flytte en brik fra det første felt til det sidste felt.

3 DAGs og topologisk sortering

3.1 Professor Gørtz forslår følgende nye og simple algoritme til at konstruere en topologisk sortering: kør BFS fra en knude s med indgrad 0 og sorter knuderne efter stigende afstand fra s. Virker algoritmen?

3.2 Giv en algoritme, der givet en graf G og en sortering S af knuder i G afgør om S er en topologisk sortering.

3.3 Givet en DAG G, findes der en topologisk sortering af G, der *ikke* kan fremkomme vha. af den rekursive algoritme til topologisk sortering?

3.4 [$*$] En *Hamilton-sti* er en sti der besøger alle knuder netop en gang. Giv en algoritme til at afgøre om en DAG har en Hamilton-sti.

4 [†] **BFS implementation** Lad G være en graf givet i incidenslisterepræsentationen med sorterede at incidenslister. Implementer BFS. Givet en startknude s og en slutknude t skal du bestemme *længden* af den korteste sti mellem dem. Når der er flere mulige naboer at vælge mellem, så tag den med mindste nummer.

5 [$*$] **Etnografer**[1] Du skal hjælpe nogle etnografer med at analysere noget mundtligt historiedata, de har samlet ved at interviewe medlemmer af en landsby, for at lære om livet i området gennem de sidste 200 år. Du har gennem interviewene fået kendskab til en mængde afdøde personer, $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Etnograferne har samlet forskellige fakta om disse personers liv. Specifikt, for et hvert par af personer (P_i, P_j) ved etnograferne en af følgende fakta:

(a) P_i døde før P_j blev født.

(b) P_i og P_j var begge i live på samme tidspunkt.

Naturligvis, er etnograferne ikke sikre på at deres fakta er korrekte; hukommelse kan fejle og all information er blevet mundtligt overbragt. Derfor vil de gerne afgøre om det data de har samlet er konsistent, i den forstand at der kunne have eksisteret personer således at alle faktaerne om dem holder.

Giv en algoritme til at løse etnografernes problem. Din algoritme skal enten give en konsistent sekvens af fødsler og dødsfald eller rapportere at der ikke findes nogen.

6 Tre Dunke Du er givet tre dunke med plads til henholdvis 8, 5 og 3 liter. Dunken på 8 liter er fyldt med vand og de to andre er tomme. Dit mål er at få præcis 4 liter i en af dunkene ved at at fylde en dunk helt op eller ved at tømme en dunk over i en anden. Løs følgende opgaver.

6.1 [$*$] Vis at det kan lade sig gøre og giv den korteste sekvens af tømninger og fyldninger du kan finde.

6.2 [$*$] Antag nu at du har n dunke med plads til $d_1, \ldots, d_n$ liter hver og et mål på x liter du skal have i en dunk. Giv en algoritme til at beregne den korteste sekvens af tømning og fyldninger. *Hint:* modeller problemet som en implicit graf.

O Obligatorisk afleveringsopgave: Sociale Netværk (opgaver fra eksamen 2014) Et *socialt netværk* er en mængde af P *personer* og V *venskabsrelationer*. Hver venskabsrelation består af to personer p_1 og p_2 og vi siger at p_1 og p_2 er *venner*. Hvis p_1 er ven med p_2 er p_2 ven med p_1. F. eks. er {Hans, Børge, Otto, Knud, Finn} og {(Hans, Børge), (Otto, Knud), (Børge, Otto), (Hans, Otto), (Finn, Knud)} er socialt netværk med 5 personer og 5 venskabsrelationer.

O.1 Beskriv hvordan man kan modellere et socialt netværk som en graf.

[1] Oversat fra *Algorithm Design*, Jon Kleinberg og Eva Tardos

O.2 Tegn grafen svarende til det sociale netværk i eksemplet.

O.3 En gruppe X af k personer kaldes et *tæt venskab* hvis alle personer i X er venner med alle andre personer i X. Giv en algoritme, der givet et socialt netværk og en mængde X af k personer, afgør om X er et tæt venskab eller ej. Analyser køretiden af din algoritme som funktion af P, V og k.

O.4 En *venskabskæde* af længde j er en sekvens af personer $p_1, \ldots, p_j$ så p_i er ven med p_{i+1} for alle i, $1 \leq i < j$. Givet en person p og et heltal $t \geq 0$ er p's *t-venner* alle personer, der har en venskabskæde til p af længde højst t (vi definerer 0-venner af p til at være p selv). Angiv alle 2-venner af Hans i eksemplet.

O.5 Giv en algoritme, der givet et socialt netværk, en person p og et heltal $t \geq 0$, beregner alle t-venner af p. Analyser køretiden af din algoritme som funktion af P, V og t.