

Prioritetskøer

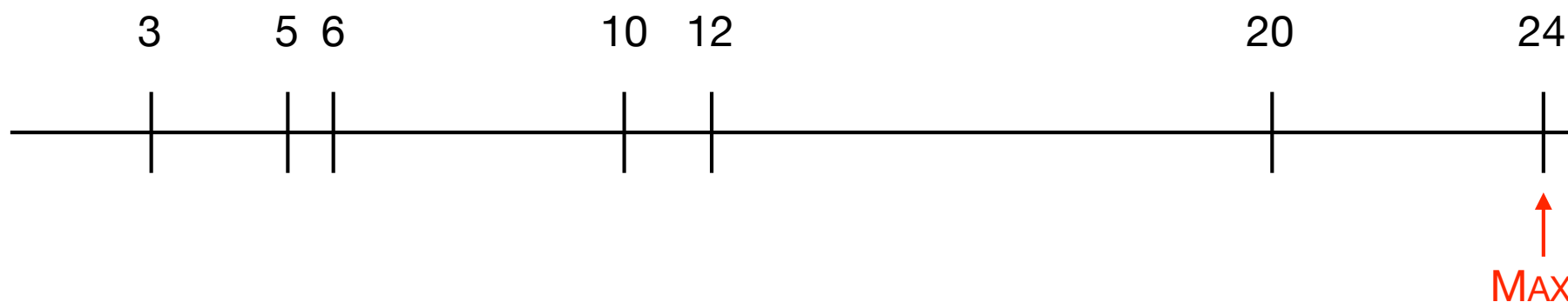
- Prioritetskøer
- Træer og hobe
- Repræsentation af hobe
- Algoritmer på hobe
- Hobkonstruktion
- Hobsortering

Prioritetskøer

- **Prioritetskøer**
- Træer og hobe
- Repræsentation af hobe
- Algoritmer på hobe
- Hobkonstruktion
- Hobsortering

Prioritetskøer

- **Prioritetskøer (priority-queues)**. Vedligehold en dynamisk mængde S af elementer. Hver element x er tilknyttet en nøgle $x.key$ og satellitdata $x.data$.
 - $MAX()$: returner element med **største** nøgle.
 - $EXTRACTMAX()$: returner **og fjern** element med **største** nøgle.
 - $INCREASEKEY(x, k)$: sæt $x.key = k$. Vi antager $k \geq x.key$.
 - $INSERT(x)$: sæt $S = S \cup \{x\}$

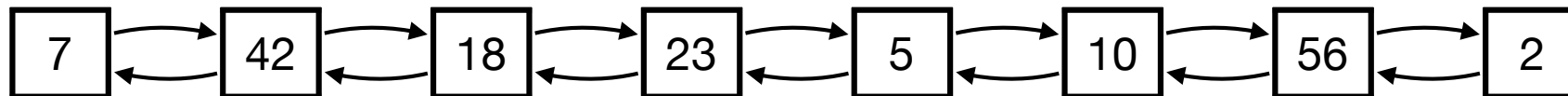


Prioritetskøer

- **Anvendelser.**
 - Skedulering
 - Korteste veje i grafer (Dijkstras algoritme + venner)
 - Mindste udspændende træer i grafer (Prims algoritme)
 - Kompression (Huffmans algoritme)
 - ...
- **Udfordring.** Hvordan kan vi løse problemet med nuværende teknikker?

Prioritetskøer

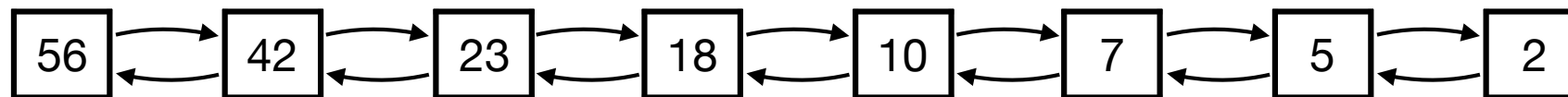
- **Løsning med hæftet liste 1.** Vedligehold S i en dobbelt-hæftet liste.



- $\text{MAX}()$: lineær søgning efter element med største nøgle.
- $\text{EXTRACTMAX}()$: lineær søgning efter element med største nøgle. Returner og fjern element.
- $\text{INCREASEKEY}(x, k)$: sæt $x.\text{key} = k$.
- $\text{INSERT}(x)$: tilføj element i start af listen (antager element ikke findes i forvejen).
- **Tid.**
 - MAX og EXTRACTMAX i $O(n)$ tid ($n = |S|$).
 - INCREASEKEY og INSERT i $O(1)$ tid.
- **Plads.**
 - $O(n)$.

Prioritetskøer

- Løsning med hægtet liste 2. Vedligehold S i en dobbelt-hægtet **sorteret** liste.



- MAX(): returner første element.
- EXTRACTMAX(): returner og fjern første element.
- INCREASEKEY(x, k): sæt $x.key = k$. Lineær søgning i listen for at indsætte x på korrekt position.
- INSERT(x): lineær søgning for at indsætte x på korrekt position.
- Tid.
 - MAX og EXTRACTMAX i $O(1)$ tid.
 - INCREASEKEY og INSERT i $O(n)$ tid.
- Plads.
 - $O(n)$.

Prioritetskøer

Datastruktur	MAX	EXTRACTMAX	INCREASEKEY	INSERT	Plads
hægtet liste	$O(n)$	$O(n)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(n)$
sorteret hægtet liste	$O(1)$	$O(1)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$

- **Udfordring.** Kan vi gøre det betydeligt bedre?

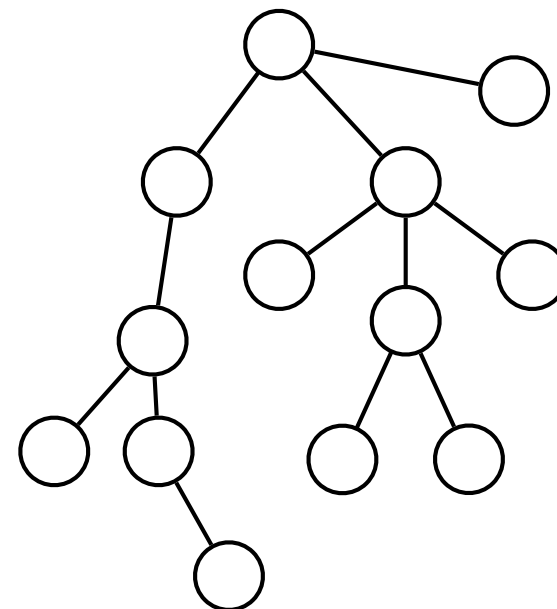
Prioritetskøer

- Prioritetskøer
- Træer og hobe
- Repræsentation af hobe
- Algoritmer på hobe
- Hobkonstruktion
- Hobsortering

Rodfæstede træer

- Rodfæstede træer.

- Knuder forbundet med kanter.
- Sammenhængende og uden kredse.
- En knude udvalgt til at være rod.
- Speciel type graf.



- Terminologi.

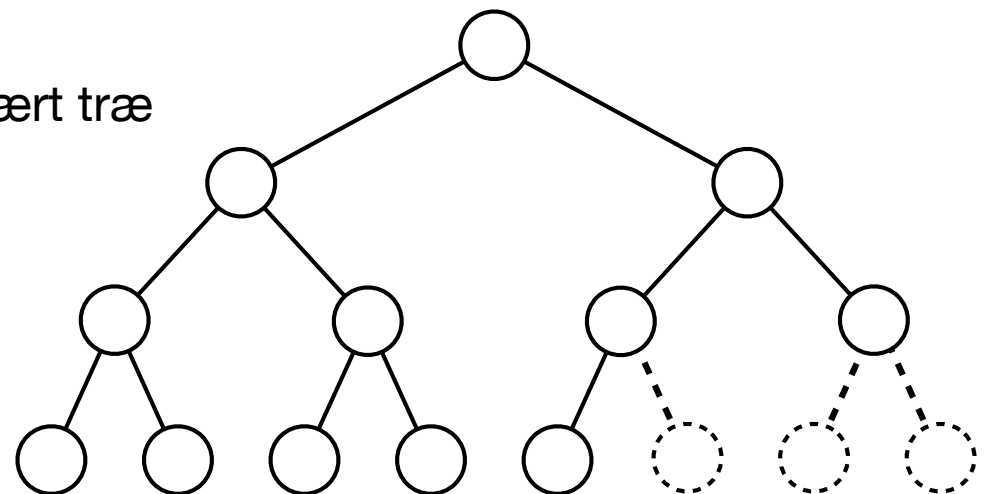
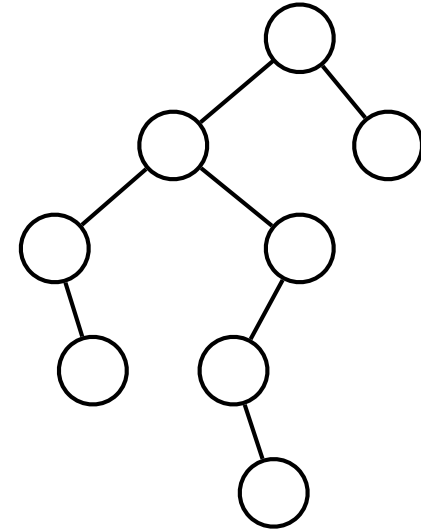
- Børn, forælder, efterkommer, forfader, blade, interne knuder, sti.

- Dybde og højde.

- Lad v være en knude i træ T .
- dybden af v = længden af sti fra v til roden.
- højden af v = længden af længste sti fra v til en bladefterkommer.
- dybden af T = højden af T = længden af længste sti fra rod til et blad.

Binære træer

- **Binært træ.** Binært træ er enten
 - Tomt
 - En knude med et **venstre** og **højre** barn der begge er binære træer.
- **Komplet binært træ.** Binært træ hvor alle niveauer i træet er fulde.
- **Næsten komplet binært træ.** Komplet binært træ hvor 0 eller flere blade er fjernet fra højre mod venstre.
- **Lemma.** Højden af et (næsten) komplet binært træ med n knuder er $\Theta(\log n)$.
- **Bevis.** Se ugeseddel.

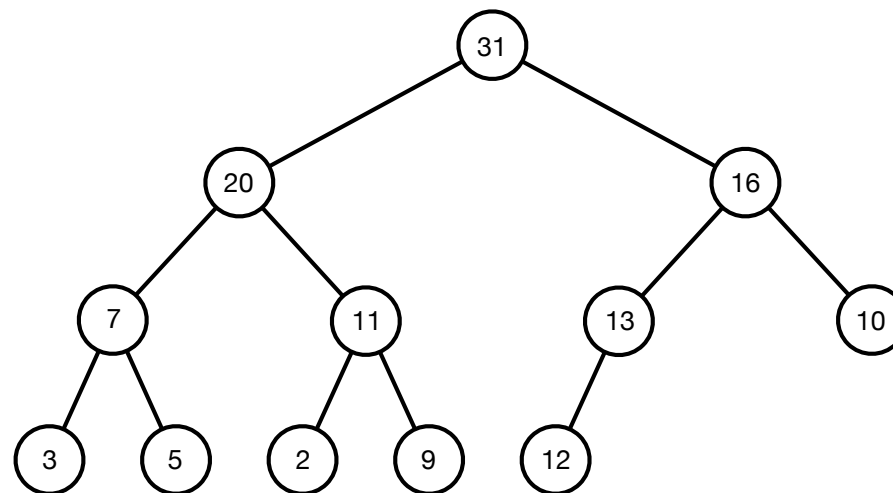


Hob

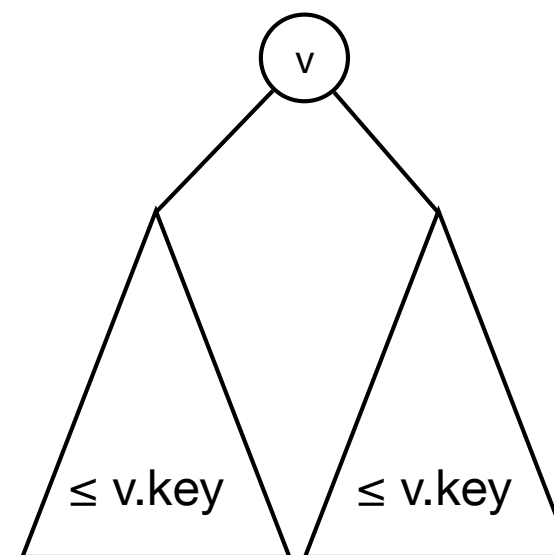
- **Hob (heap)**. Næsten komplet binært træ der overholder **hob-orden**.

- **Hob-orden (heap-order)**.

- Alle knuder indeholder et element.
- For alle knuder v :
 - alle nøgler i venstre deltræ og højre deltræ er $\leq v.key$.



- **Max-hob vs min-hob**. Ovenstående er **max-hob**. Udskift \leq med \geq for at få **min-hob**.



Prioritetskøer

- Prioritetskøer
- Træer og hobe
- **Repræsentation af hobe**
- Algoritmer på hobe
- Hobkonstruktion
- Hobsortering

Hob

- **Repræsentation.** Vi skal bruge følgende navigationsoperationer på en hob:
 - $PARENT(x)$: returner forældren af x .
 - $LEFT(x)$: returner venstre barn af x .
 - $RIGHT(x)$: returner højre barn af x .
- **Udfordring.** Hvordan kan vi repræsentere en hob så vi kan understøtte navigation effektivt?

Hob

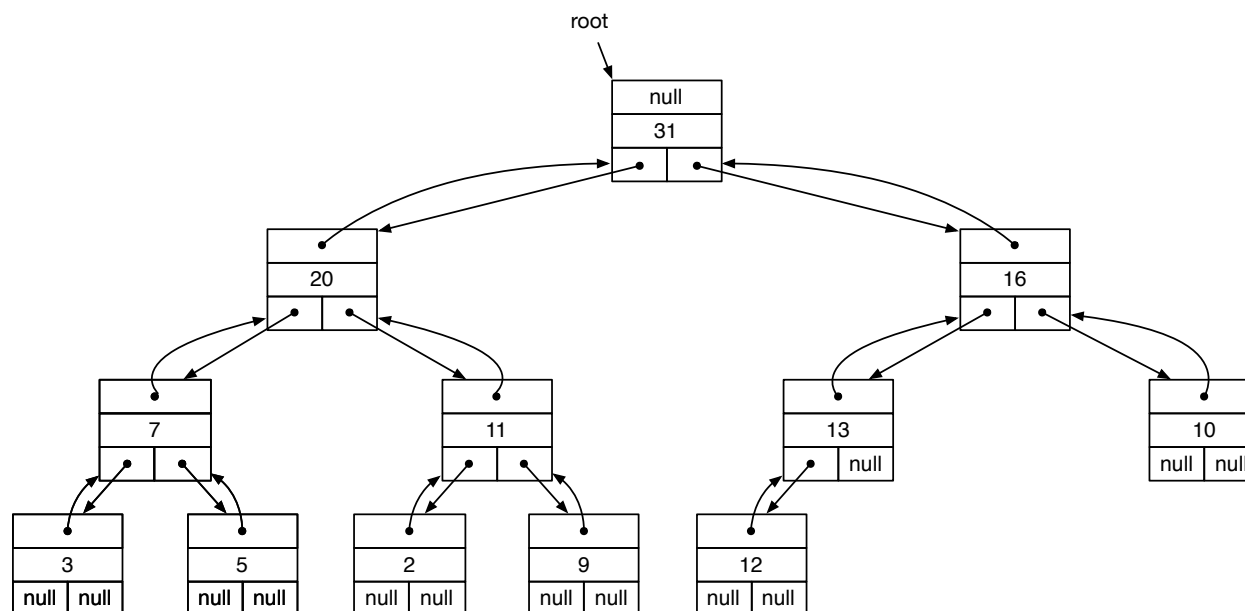
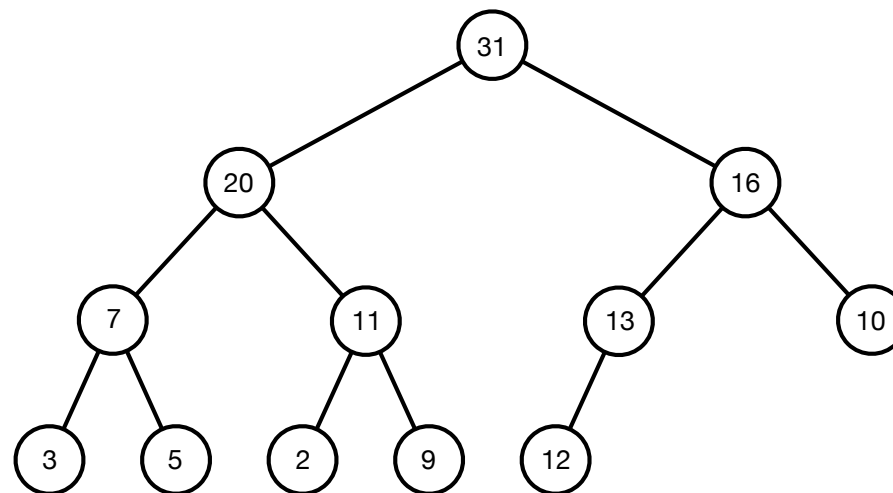
- **Repræsentation med hægter.** Hver knude v består af

- $v.key$
- $v.parent$
- $v.left$
- $v.right$

- PARENT, LEFT, RIGHT ved at følge pointer.

- **Tid.** $O(1)$

- **Plads.** $O(n)$



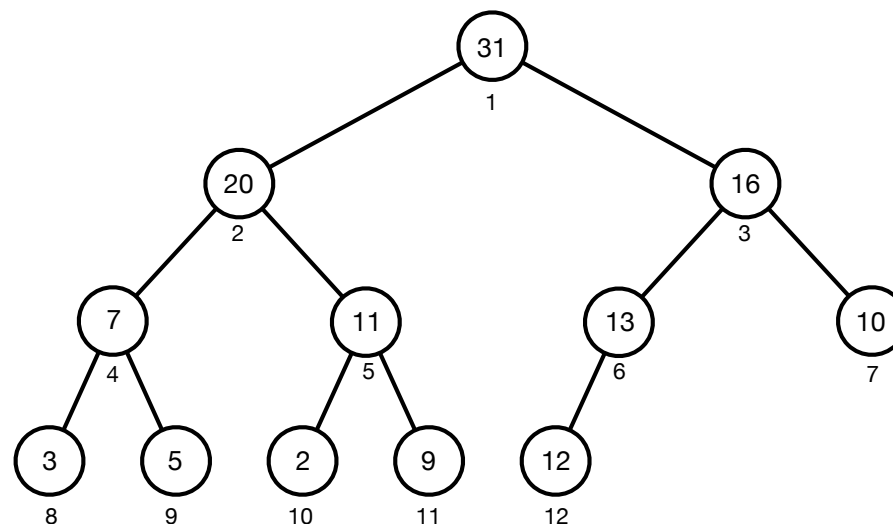
Hob

- Repræsentation med tabel.

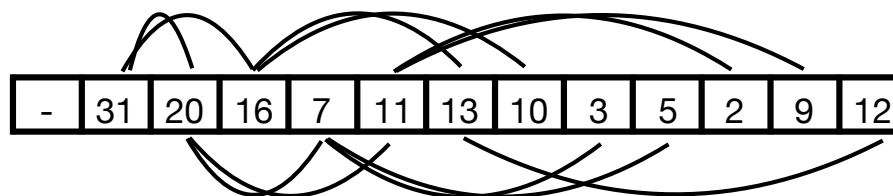
- Tabel $H[0..n]$
- $H[0]$ bruges ikke.
- $H[1..n]$ indeholder knuder i **niveauorden** (level order).

- $PARENT(x)$: returner $\lfloor x/2 \rfloor$
- $LEFT(x)$: returner $2x$.
- $RIGHT(x)$: returner $2x + 1$

- Tid. $O(1)$
- Plads. $O(n)$



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
-	31	20	16	7	11	13	10	3	5	2	9	12



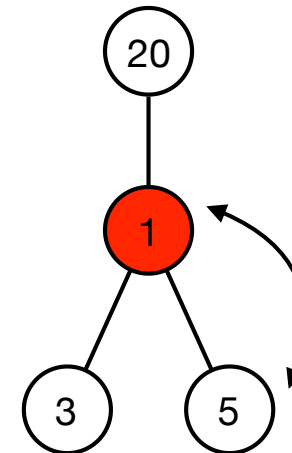
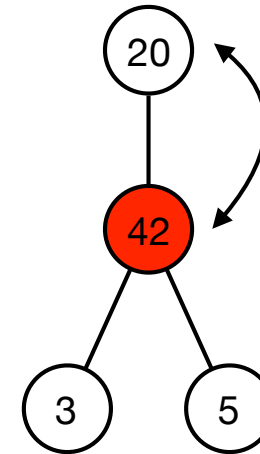
Prioritetskøer

- Prioritetskøer
- Træer og hobe
- Repræsentation af hobe
- **Algoritmer på hobe**
- Hobkonstruktion
- Hobsortering

Algoritmer på hobe

- BUBBLEUP(x):
 - Hvis hoborden er overtrådt i knude x fordi nøgle i x er $>$ nøgle i PARENT(x).
 - Ombyt x og PARENT(x).
 - Gentag med PARENT(x) indtil hoborden er opfyldt.

- BUBBLEDOWN(x):
 - Hvis hoborden er overtrådt i knude x fordi nøgle i x er $<$ nøgle i LEFT(x) eller RIGHT(x).
 - Ombyt x og barn b med **største** nøgle.
 - Gentag med b indtil hoborden er opfyldt.



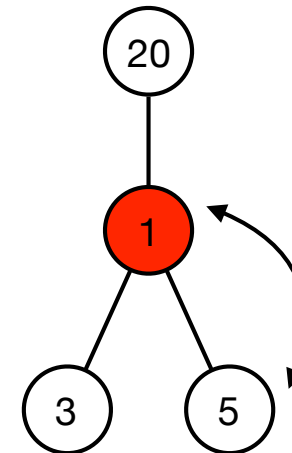
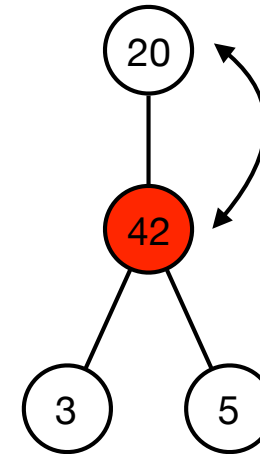
Algoritmer på hobe

- BUBBLEUP(x):
 - Hvis hoborden er overtrådt i knude x fordi nøgle i x er $>$ nøgle i PARENT(x).
 - Ombyt x og PARENT(x).
 - Gentag med PARENT(x) indtil hoborden er opfyldt.

- BUBBLEDOWN(x):
 - Hvis hoborden er overtrådt i knude x fordi nøgle i x er $<$ nøgle i LEFT(x) eller RIGHT(x).
 - Ombyt x og barn b med **største** nøgle.
 - Gentag med b indtil hoborden er opfyldt.

- Tid. Hvor hurtigt kører de?
 - BUBBLEUP og BUBBLEDOWN i $\Theta(\log n)$ tid.

- Hvordan kan vi bruge dem til implementation af prioritetskøoperationer?



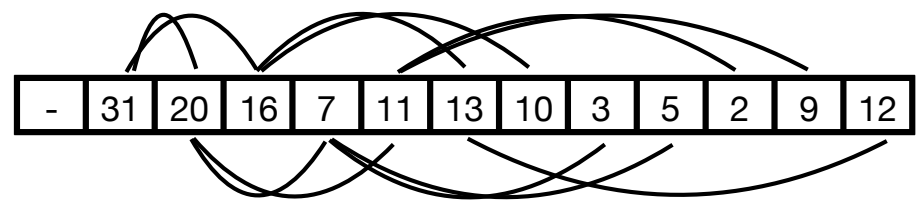
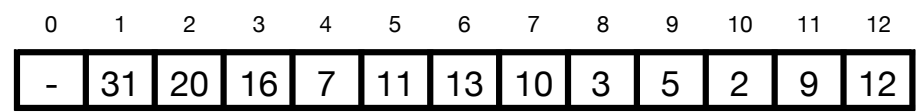
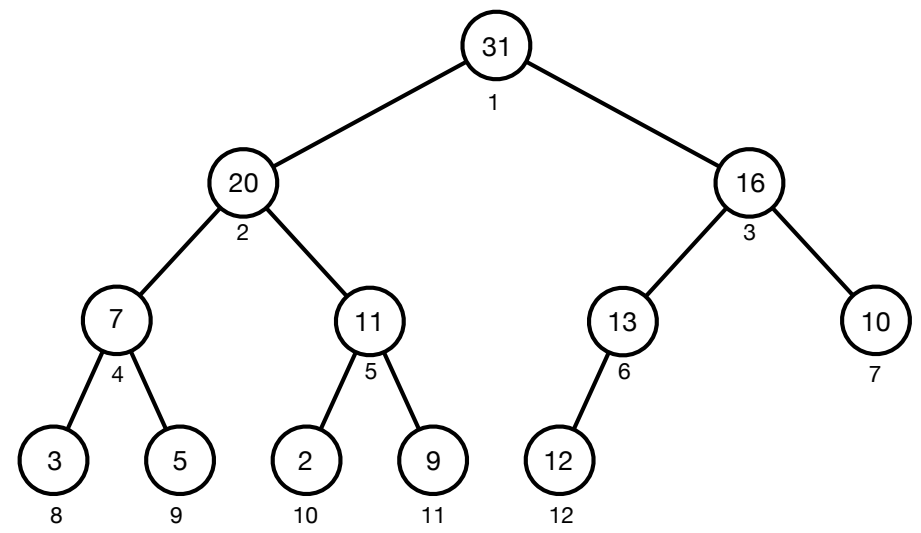
Prioritetskøoperationer

MAX()
return H[1]

INSERT(x)
n = n + 1
H[n] = x
BUBBLEUP(n)

EXTRACTMAX()
r = H[1]
H[1] = H[n]
n = n - 1
BUBBLEDOWN(1)
return r

INCREASEKEY(x, k)
H[x] = k
BUBBLEUP(x)



- **Opgave.** Udfør følgende sekvens i initielt tom hob: 2, 5, 7, 6, 4, E, E
- Tal betyder INSERT og E betyder EXTRACTMAX.

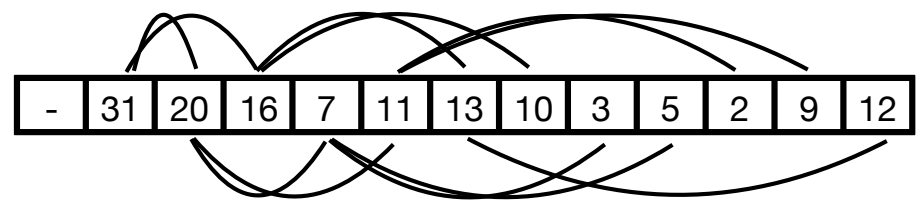
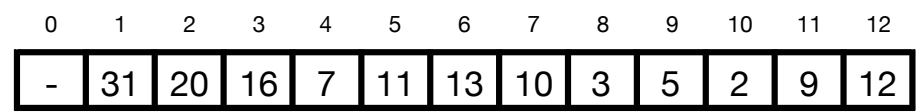
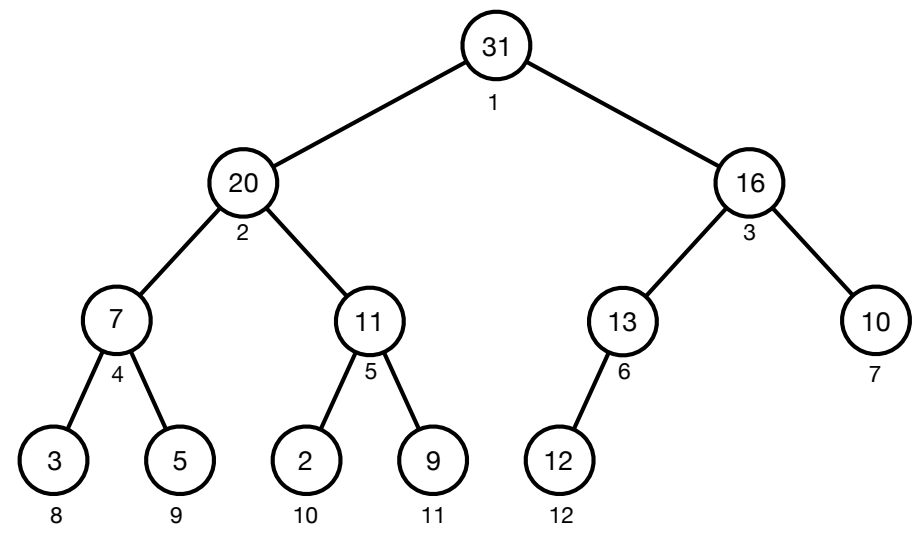
Prioritetskøoperationer

MAX()
return H[1]

INSERT(x)
n = n + 1
H[n] = x
BUBBLEUP(n)

EXTRACTMAX()
r = H[1]
H[1] = H[n]
n = n - 1
BUBBLEDOWN(1)
return r

INCREASEKEY(x, k)
H[x] = k
BUBBLEUP(x)



- Tid. Hvor hurtigt kører de?
 - MAX i $\Theta(1)$ tid.
 - EXTRACTMAX, INCREASEKEY og INSERT i $\Theta(\log n)$ tid.

Prioritetskøer

Datastruktur	MAX	EXTRACTMAX	INCREASEKEY	INSERT	Plads
hægtet liste	$O(n)$	$O(n)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(n)$
sorteret hægtet liste	$O(1)$	$O(1)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$
hob	$O(1)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(n)$

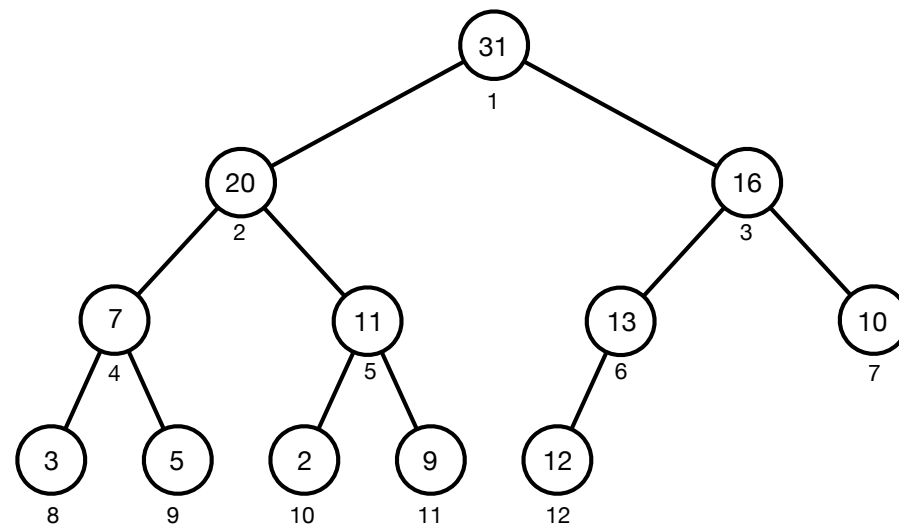
- Hob (med tabelrepræsentation) er eksempel på en **implicit datastruktur**.

Prioritetskøer

- Prioritetskøer
- Træer og hobe
- Repræsentation af hobe
- Algoritmer på hobe
- **Hobkonstruktion**
- Hobsortering

Hobkonstruktion

- **Hobkonstruktion.** Givet n heltal i en tabel $H[0..n]$, byg tabel om til en hob.



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
-	20	7	16	9	12	13	10	5	3	2	11	31

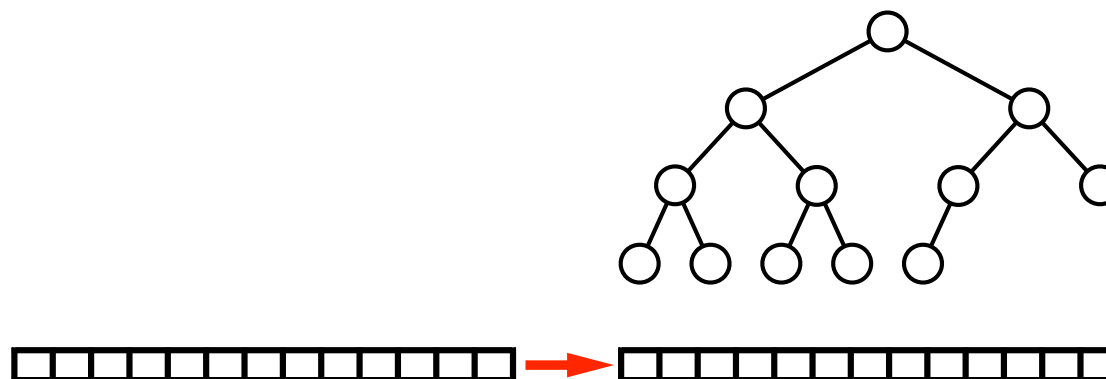


0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
-	31	20	16	7	11	13	10	3	5	2	9	12

Hobkonstruktion

- **Algoritme 1.**

- Etabler hoborden oppefra og ned.
- For alle knuder i stigende niveauorden kør BUBBLEUP.



- **Tid.**

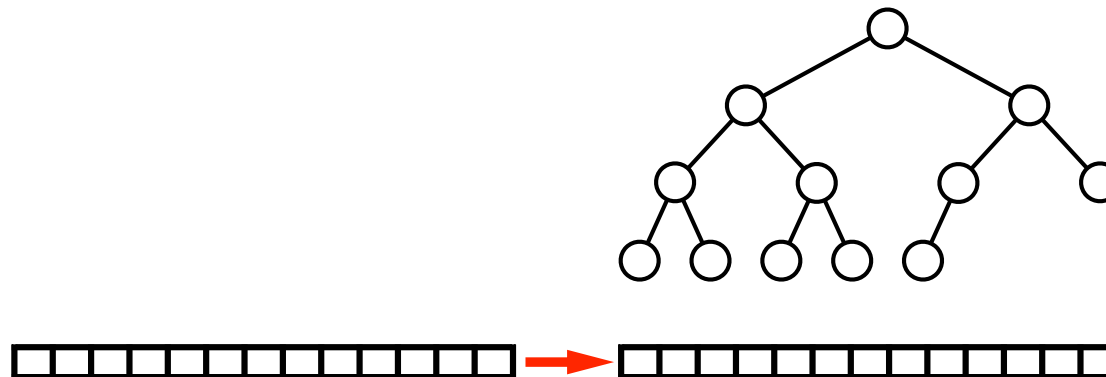
- For hver knude af dybde d bruger vi $O(d)$ tid.
- $\sim n/2$ knuder af dybde $\log n$, $\sim n/4$ knuder af dybde $\log n - 1$, $\sim n/8$ knuder af dybde $\log n - 2$, 2 knuder af dybde 1.
- $n/2 \cdot \log n + n/4 \cdot (\log n - 1) + n/8 \cdot (\log n - 2) + \dots + 2 \cdot 1 = \Theta(n \log n)$
- $\Rightarrow O(n \log n)$ tid.

- **Udfordring.** Kan vi gøre det bedre?

Hobkonstruktion

- **Algoritme 2.**

- Etabler hoborden nedefra og op.
- For alle knuder i faldende niveauorden kør BUBBLEDOWN.



- **Tid.**

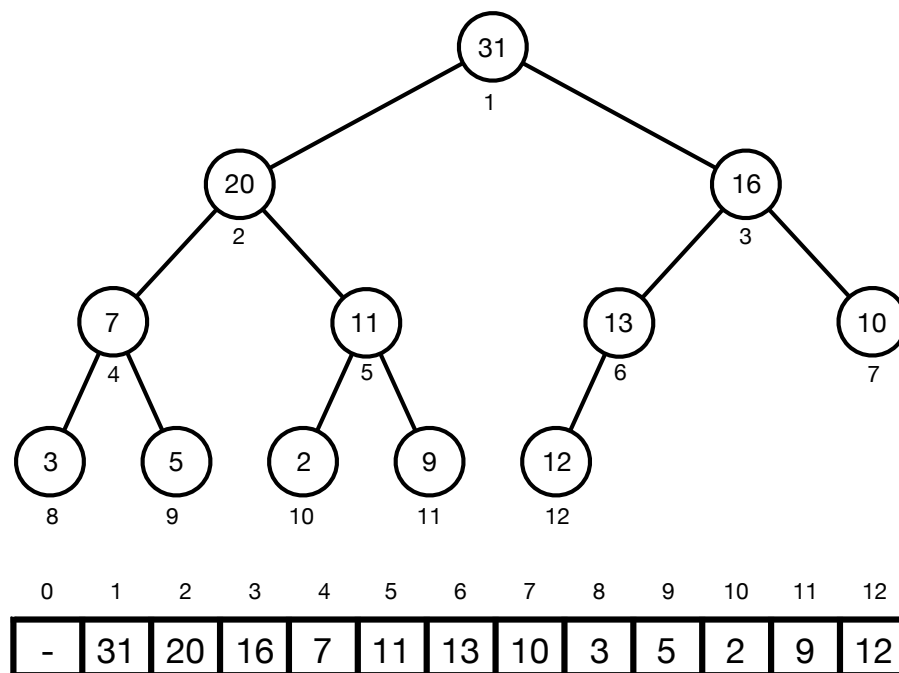
- For knude af højde h bruger vi $O(h)$ tid.
- $\sim n/4$ knuder af højde 1, $n/8$ knuder af højde 2, $n/16$ knuder af højde 3, ..., 1 knude af højde h .
- $n/4 \cdot 1 + n/8 \cdot 2 + n/16 \cdot 3 + \dots + 1 \cdot h = O(n)$ (se ugeseddel)
- $\Rightarrow O(n)$ tid

Prioritetskøer

- Prioritetskøer
- Træer og hobe
- Repræsentation af hobe
- Algoritmer på hobe
- Hobkonstruktion
- Hobsortering

Hobsortering

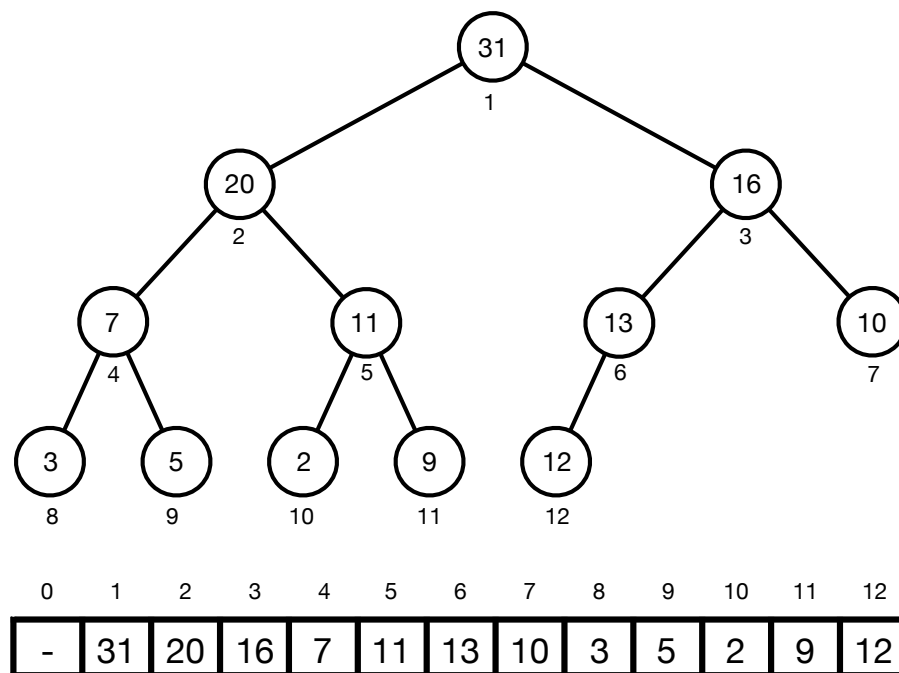
- **Sortering.** Hvordan man bruge en hob og prioritetskøoperationer til at sortere en tabel $H[1..n]$ af n tal?
- Algoritme.
 - Konstruer en hob for H .
 - Lav n EXTRACTMAX.
 - Indsæt resultater i **slutning** af tabel.
 - Returner tabel H .



- **Tid.**
 - Hobkonstruktion i $\Theta(n)$ tid
 - n EXTRACTMAX i $\Theta(n \log n)$ tid.
 - i alt $\Theta(n \log n)$ tid.

Hobsortering

- **Theorem.** Vi kan sortere en tabel i $\Theta(n \log n)$ tid.
- Bruger kun $O(1)$ **ekstra plads.**
- **In-place** sorteringsalgoritme.
- **Ækvivalens** af sortering og prioritetskøer.



Prioritetskøer

- Prioritetskøer
- Træer og hobe
- Repræsentation af hobe
- Algoritmer på hobe
- Hobkonstruktion
- Hobsortering