

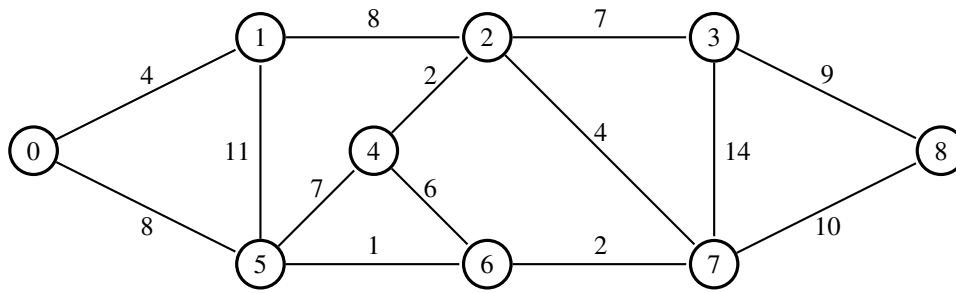
Mindste udspændende træ

Eva Rotenberg*

Om denne uge

Materialer *Introduction to Algorithms*, Cormen, Leiserson, Rivest og Stein (CLRS): kap. 23.

Opgaver



Figur 1: Graf til opgaverne

1 Algoritmer og egenskaber

Kig på grafen G i figur 1.

- 1.1 Håndkør Kruskals algoritme på G .
- 1.2 Håndkør Prims algoritme på G startende fra knude 0. Vis indhold af prioritetskø under kørslen.
- 1.3 Angiv alle mindste udspændende træer af G .
- 1.4 Giv en algoritme til at finde et udspændende træ.
Husk hvad "giv en algoritme" betyder (se evt kursushjemmesiden under oftest stillede spørgsmål).

2 Omvendt sletning

Overvej følgende algoritme til at beregne et mindste udspændende træ. Start med en vægtet, sammenhængende graf G . Kig på kanter i G i rækkefølge fra tungeste til letteste kant. For hver kant undersøg om fjernelse af kanten gør grafen usammenhængende. Hvis den gør, lader vi kanten blive og ellers fjerner vi den fra G .

- 2.1 Håndkør algoritmen på grafen i figur 1.
- 2.2 Argumentér for at algoritmen beregner et mindste udspændende træ af G .

*baseret på materiale af Billes&Gørtz

3 Egenskaber for mindste udspændende træ

Lad G være en vægtet graf.

- 3.1 Vis at en letteste kant i en graf G er del af et mindste udspændende træ for G . Hvad kan du sige om en tungeste kant?
- 3.2 Antag vi skalerer alle kantvægte i G ved at gange dem med en værdi $c > 0$. Hvordan ser mindste udspændende træud i den nye graf?
- 3.3 Vis at hvis alle kantvægte i G er distinkte, så er det mindste udspændende træ unikt. Hint: husk egenskaberne for et mindste udspændende træ.
- 3.4 Kruskals algoritme kan returnere forskellige udspændende træer på den samme inputgraf G alt efter hvilken kant, den vælger, når flere kanter har samme vægt. Vis at for ethvert mindste udspændende træ T af G , er det muligt at sortere kanterne i G , således at Kruskals algoritme returnerer T .

4 Største udspændende træ

Givet en vægtet graf G , giv en algoritme til at beregne et største udspændende træ af G , dvs. et udspændende træ af maksimal total vægt. Hint: transformér problemet.

5 Mindste udspændende træ i grafer med generelle vægte

- 5.1 Vis at snit- og kredsegenskaber gælder på grafer, hvor kantvægte ikke behøver at være distinkte (egenskaberne skal omformuleres passende).
- 5.2 Konkluder at Prims og Kruskals algoritme også virker i dette tilfælde.

6 [*] Mindste udspændende træ i grafer med begrænsede kantvægte

Lad G være en vægtet graf med n knuder og m kanter således at alle kantvægtene er værdier fra $\{1, 2, \dots, 10\}$. Giv en effektiv algoritme til at beregne et mindste udspændende træ.

7 † Implementation af Kruskals algoritme

Implementer Kruskals algoritme på en sammenhængende, vægtet og uorienteret graf givet i incidensliste-repræsentationen. Input til dit program skal være grafen og output skal være den samlede vægt af et mindste udspændende træ.